Denn aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s}=\frac{-dx}{1-x}-\frac{2x\,dx}{1-x^2}-\frac{3x^2\,dx}{1-x^3}-\frac{4x^3\,dx}{1-x^4}-\frac{5x^4\,dx}{1-x^5}-\text{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s}=\frac{-dx-2x\,dx+5x^4\,dx+7x^6\,dx-12x^{11}\,dx-15x^{14}\,dx+\text{etc.}}{1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\text{etc.}}$$

folglich ist $\dfrac{1-2x-5x^4-7x^6+12x^{11}+15x^{14}-\text{etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\text{etc.}}=$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3x^2}{1-x^3}+\frac{5x^4}{1-x^5}+\frac{4x^3}{1-x^4}+\frac{6x^5}{1-x^6}+\text{etc.}$$

wenn aber alle diese letzten Brüche in progressiones geometricas verwandelt werden, so bekommt man für dieselben

$$\begin{array}{llllllllllllll}
1+ & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7+ & x^8+ & x^9+ & x^{10}+ & x^{11}+ & x^{12}+\text{etc.} \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +2x^9 & & +2x^{11} & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +3x^{11} & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +4x^{11} & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +5x^9 & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +6x^{11} & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7+ & 9x^8+ & 10x^9+ & 11x^{10}+ & 12x^{11}+ & 13x^{12}+\text{etc.} \\
\hline
\end{array}$$

das ist:

$$1+\int 2x+\int 3x^2+\int 4x^3+\int 5x^4+\int 6x^5+\int 7x^6+\int 8x^7+\int 9x^8+\int 10x^9+\text{etc.}=$$

$$\frac{1+2x-5x^4-7x^6+12x^{11}+15x^{14}-22x^{21}-26x^{25}+35x^{34}+\text{etc.}}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-\text{etc.}},$$

woraus das gegebene theorema leicht fliesst. Man sieht aber zugleich, dass dasselbe nicht so obvium ist, und dass zweifelsohne darin noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Euler.

LETTRE CIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorème d'analyse. Chaque nombre est-il véritablement composé de trois nombres trigonaux?

St. Petersburg d. 15. April 1747.

Die Observation, welche Ew. mir communiciret haben, scheinet mir bereits durch die angeführte Induction dermaassen erwiesen, dass man auf deren Wahrheit hundert gegen eins halten könnte. Sonst haben Ew. schon längst angemerket, dass $A\ldots(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. $=$ $B\ldots 1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. und ich erinnere mich, dass ich daraus die an sich selbst sehr leichte conséquence gezogen, dass wenn die potestates ipsius x in B verdoppelt werden, und

$$C=1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\text{etc.}$$

gesetzt wird, alsdann

$$\frac{C}{B}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ \text{etc.}$$

seyn muss.

Von der Wahrheit eines andern theorematis bin ich bey weitem nicht so persuadiret, nehmlich dass eine jede Zahl aus dreyen trigonalibus bestehet, oder dass ein jeder numerus hujus formae $8m+3$ eine summa trium quadratorum sey. Ew. haben mir schon vor einigen Jahren, wenn ich mich recht erinnere, gesaget, dass Fermatius selbiges seinem Berichte nach, demonstriren können; zu dergleichen Demonstration aber halte ich die inductiones für unzulänglich, weil man unzählige Exempel pro valoribus m angeben kann, die zwar zutreffen, allein zur Generalität des Satzes nichts contribuiren (als ex. gr. wenn m diese Form hat $bb+bc+cc$). Wenn man aber nur beweisen könnte, dass $(2p-1)^2+42$ allezeit eine summa trium quadratorum sey (ich habe es nur bis auf den casum $p=17$ probiret), so hielte ich davor, dass zur völligen Demonstration des theorematis ein guter Anfang gemacht seyn würde. Indessen sehe ich nicht, wie man es demonstriren will, ohne zugleich eine Methode zu finden, wodurch die tria quadrata selbst angegeben werden können. Aber zu beweisen, dass ein jeder numerus aus dreyen trigonalibus uno affirmativo et duobus negativis bestehet, ist bey weitem nicht so schwer.

Aus den Zeitungen von gelehrten Sachen ist zu ersehen, dass ein gewisser H. Mizler über Ew. Buch von der Musik Anmerkungen gemacht. Weil mir dieselben ganz unbekannt sind, so bitte mir nur mit ein paar Worten zu melden, was Sie davon halten. Die neue Logik des Hn. Knutzen, die ich auch noch nicht gesehen habe, wird in den gel. Z. sehr gerühmet.

Goldbach.

LETTRE CV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mêmes sujets. Théorèmes de la théorie des nombres.

Berlin d. 6 Mai. 1747.

Der Anmerkung, welche Ew. über die Gleichheit

$$A \ldots (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.} =$$
$$B \ldots 1-x-x^2+x^5+x^7-\text{etc.}$$

gemacht, dass, wenn

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\text{etc.},$$

alsdann sey $\frac{C}{B}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)$ etc., erinnere ich mich noch wohl. Ich habe aber weder daraus, noch aus andern Betrachtungen, die Gleichheit zwischen den Formuln A und B richtig darthun können; denn dass $A=B$ und dass in B die Exponenten von x just nach dieser serie 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc. fortgehen, habe ich auch nur per inductionem geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzet, dass ich die Sach für völlig wahr halten kann; allein ich wäre sehr begierig davon eine demon-