alsofort, dass die termini locis paribus nicht quadrati seyn können, indem sie alle $\square \pm 1$ sind; ob aber alle termini locis imparibus, praeter primum, auch keine quadrata sind, muss ich dahingestellet seyn lassen, weil ich die Unmöglichkeit noch zur Zeit nicht einsehe, imgleichen, ob es unendlich viel casus gibt, darin $2A^4 - 1$ ein quadratum werden kann, wie in den casibus $A = 1$ und $A = 13$.

Goldbach.

LETTRE CIX.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Propriété des séries recurrentes.

Berlin d. 2. September 1747.

Dass in den seriebus recurrentibus, wo ein jeder terminus aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird, zugleich ein jeder terminus aus dem vorhergehenden allein angegeben werden könne vermittelst einer quadratischen Aequation, ist eine sehr merkwürdige Eigenschaft. Denn wenn in dieser serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}$ ist $C = aB - bA$ und $R = aQ - bP$, so wird $QQ - aPQ + bPP$ ad b^x in ratione constante seyn, welche, wenn $x = 1$, ist wie $BB - aAB + bAA$ ad b; folglich ist $QQ - aPQ + bPP = (BB - aAB + bAA)b^{x-1}$. Und in der von Ew. angeführten serie $\overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{7}, \overset{4}{17}, \overset{5}{41}, \overset{6}{99} \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$, wo $a = 2$ und

$b = -1$, $A = 1$, $B = 3$, wird seyn $QQ - 2PQ - PP = 2(-1)^{x-1}$ und also $Q = P + \sqrt{(2PP + 2(-1)^{x-1})}$ oder $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$. Bey dieser Betrachtung bin ich auf den Gedanken gefallen, ob etwan in einer serie recurrente, deren jeder terminus aus den drey vorhergehenden bestimmt wird, nicht auch ein jeder aus den zwey vorhergehenden, vermittelst einer aequationis cubicae, angegeben werden könnte. Es sey in $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}, \ldots . \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}, \overset{x+3}{S}$ etc., $D = aC - bB + cA$ und $S = aR - bQ + cP$, so habe ich gefunden, dass folgende ratio immer constans seyn müsse

$$\left.\begin{array}{l} R^3 - 2aQR^2 + (aa+b)\,Q^2R - (ab-c)\,Q^3 \\ \quad + \; bPR^2 - (ab+3c)PQR + (ac+bb)\,PQ^2 \\ \qquad\qquad + \quad acP^2R - \quad 2bcP^2Q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad ccP^3 \end{array}\right\} : c^x,$$

welche ratio constans aus den terminis initialibus A, B, C, posito $x = 1$ erkannt wird.

Um aber wieder auf die von Ew. gemeldte seriem $1, 3, 7, 17, 41$ etc., wo $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$ zu kommen, so ist allerdings gewiss, dass kein terminus derselben ausser dem ersten, 1, ein Quadrat seyn könne. Denn, es sey P als ein terminus derselben ein Quadrat, nehmlich $P = zz$, so müsste auch $2z^4 \pm 2$ ein Quadrat seyn, welches nicht seyn kann. Denn es sey pro signo — erstlich $2z^4 - 2 = 4(zz-1)^2 \frac{pp}{qq}$, so wird $zz + 1 = \frac{2ppzz}{qq} - \frac{2pp}{qq}$ und $zz = \frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun p et q numeri primi inter se, so kann zz kein numerus integer seyn, wenn nicht $2pp - qq = 1$; daher aber wird $qq = 2pp - 1$, folglich $zz = 4pp - 1 = P$, also ist P um 1 immer kleiner als ein Quadrat, und kann also in integris kein Quadrat seyn. Wenn aber das Zeichen

$+$ gilt, so ist $2z^4 + 2 = (zz+1)^2 + (zz-1)^2$. Damit nun solches ein Quadrat werde, so setze man: $zz + 1 = aa - bb$ und $zz - 1 = 2ab$, wobey zu merken, dass z ein numerus impar seyn müsse, denn sonsten würde $2z^4 + 2$ ein numerus impariter par, folglich kein Quadrat. Es kann aber generaliter diese Formul $2z^4 + 2y^4$ kein quadratum seyn, ausser $y = z$, welches ich also beweise: Da $2z^4 + 2y^4 = (zz+yy)^2 + (zz-yy)^2$, so sey $zz - yy = ab$, so wird $zz + yy = \frac{aa-bb}{2}$, und $2z^4 + 2y^4 = \left(\frac{aa+bb}{2}\right)^2$. Nun sey $a = pq$ und $b = rs$, dass $zz - yy = pqrs$ und $zz + yy = \frac{ppqq - rrss}{2}$, und man setze $z + y = pr$, $z - y = qs$, so wird $2zz + 2yy = pprr + qqss$, folglich $zz + yy = \frac{pprr+qqss}{2} = \frac{ppqq-rrss}{2}$, oder $ss = \frac{pp(qq-rr)}{qq+rr}$. Dahero müsste $\frac{qq-rr}{qq+rr}$, d. i. $q^4 - r^4$ ein quadratum seyn, welches unmöglich.

Die Formul $2A^4 - 1$, welche in den Fällen $A = 1$ und $A = 13$ ein quadratum wird, kann noch in unendlich viel andern ebenfalls ein Quadrat werden, allein nicht in numeris integris. Denn wenn $A = \frac{1525}{1343}$, oder $A = \frac{2165017}{2372159}$, so wird auch $2A^4 - 1$ ein Quadrat. Ob aber in numeris integris keine andern Fälle als die beyden gemeldten möglich sind, bin ich nicht im Stande zu decidiren.

Euler.