# LETTRE CX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 30. Sept. 1747.

Die Aequation, welche Sie bey den seriebus recurrentibus observiret haben, wird vielleicht mit nachfolgender Anmerkung übereinkommen: Wenn man in dem casu, da die lex progressionis ist $C = aB - bA$, den terminum generalem setzet $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$, so wird der terminus primus $m + n$, der secundus $m\alpha + n\beta$, der tertius $m\alpha\alpha + n\beta\beta = am\alpha + an\beta - bm - bn$, oder $\alpha\alpha = a\alpha - b$, und $\beta\beta = a\beta - b$, woraus folget, dass $\alpha$ und $\beta$ zwey radices ejusdem aequationis sind, und wenn $\alpha = \frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, alsdann $\beta = \frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$. Auf gleiche Weise, wenn $D = aC - bB + cA$, wird posito termino generali $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1} + p\gamma^{x-1}$,



$\alpha^3 = a\alpha\alpha - b\alpha + c$, und wenn von den dreyen radicibus dieser Aequation die eine $\alpha$, die andere $\beta$, die dritte $\gamma$ genannt wird, so hat man den völligen terminum generalem, wobey doch als etwas seltsames anzusehen ist, dass, obgleich in den aequationibus quintae, septimae, etc. potestatum, diese radices sehr complicatae seyn müssen, die aus denenselben zusammengesetzten termini generales dennoch, wenn nur $a$, $b$, $c$, etc., item $m$, $n$, $p$, etc. integri sind, auch allezeit integri werden und die in den radicibus aequationis enthaltenen quantitates surdae sich einander destruiren.

Um zu demonstriren, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, setzen Ew. $2z^4 - 2 = 4(zz - 1)^2 \frac{pp}{qq}$, und supponiren, dass $p$ et $q$ numeri inter se primi sind. Wie ich nun den zureichenden Grund dieser Supposition nicht einsehe, so finde an demselben desto mehr Ursach zu zweifeln, weil Sie endlich auf diesen Schluss kommen, dass $P$ immer um 1 kleiner seyn muss, als ein □, da doch die Zahl 17 und unzählige andere zeigen, dass $P$ auch um 1 grösser als ein □ seyn kann, denn es sind

pro □ — 1, die termini

$$3 = 1^2 . 2^2 - 1$$
$$99 = 5^2 \; 2^2 - 1$$
$$3363 = 29^2 . 2^2 - 1$$

etc.

pro □ + 1, die termini

$$17 = 1^2 . 4^2 + 1$$
$$577 = 6^2 . 4^2 + 1$$
$$19601 = 35^2 . 4^2 + 1$$

etc.

und alle die numeri 1, 5, 29, sind termini seriei, cujus lex progressionis est $6B - A = C$; 1, 6, 35, etc. aber sind die summae derselben seriei.

Die grossen numeri in fractis, welche Ew. für $\sqrt{(2A^4-1)}$ gefunden haben, machen sehr wahrscheinlich, dass ausser 1 und 13 keine pro $A$ substituiret werden können, damit $2A^4-1$ ein quadratum in integris werde; indessen sind doch solche propositiones, eben wegen der Schwierigkeit sie zu demonstriren, merkwürdig.

Nachfolgendes problema kann ich solviren; weil ich aber ohngefähr darauf gefallen, so weiss ich nicht, ob die Solution schwer oder leicht zu finden seyn mag: Datis duobus quadratis 1 et $bb$, invenire infinitis modis tertium $cc$ hac lege, ut summa $1+bb+cc$ sit aequalis tribus aliis quadratis.

Von dem Hn. Doppelmayer habe ich seit der Zeit des fatalen Experiments, so in den Zeitungen erzählet worden, nichts vernommen. Im Fall Ew. wissen, wie er sich befindet, und ob er völlig wieder restituiret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen.

Goldbach.



# LETTRE CXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 24. October 1747.

Die letztens überschriebene Aequation pro seriebus recurrentibus beruhet allerdings auf der von Ew. gemeldten Eigenschaft dieser serierum. Denn wenn in der serie

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D} \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S},\ \overset{x+4}{T},\ \text{etc.}$$

ist $C=mB-nA$ und generaliter $R=mQ-nP$, und man formirt diese Aequation $zz-mz+n=0$, wovon die radices seyn sollen $a$, $b$, so dass $a+b=m$ und $ab=n$, so wird der terminus generalis diese Form haben $P=\alpha a^x+\beta b^x$, folglich ist $Q=\alpha a.a^x+\beta b.b^x$. Aus diesen zwey Aequationen suche ich die valores $a^x$ und $b^x$, und finde $\alpha a^x=\frac{bP-Q}{b-a}$, $\beta b^x=\frac{aP-Q}{a-b}$; diese multiplicire ich in