Die grossen numeri in fractis, welche Ew. für $\sqrt{(2A^4-1)}$ gefunden haben, machen sehr wahrscheinlich, dass ausser 1 und 13 keine pro A substituiret werden können, damit $2A^4-1$ ein quadratum in integris werde; indessen sind doch solche propositiones, eben wegen der Schwierigkeit sie zu demonstriren, merkwürdig.

Nachfolgendes problema kann ich solviren; weil ich aber ohngefähr darauf gefallen, so weiss ich nicht, ob die Solution schwer oder leicht zu finden seyn mag: Datis duobus quadratis 1 et bb, invenire infinitis modis tertium cc hac lege, ut summa $1+bb+cc$ sit aequalis tribus aliis quadratis.

Von dem Hn. Doppelmayer habe ich seit der Zeit des fatalen Experiments, so in den Zeitungen erzählet worden, nichts vernommen. Im Fall Ew. wissen, wie er sich befindet, und ob er völlig wieder restituiret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen.

Goldbach.

LETTRE CXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 24. October 1747.

Die letztens überschriebene Aequation pro seriebus recurrentibus beruhet allerdings auf der von Ew. gemeldten Eigenschaft dieser serierum. Denn wenn in der serie

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D}\ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S},\ \overset{x+4}{T},\ \text{etc.}$$

ist $C=mB-nA$ und generaliter $R=mQ-nP$, und man formirt diese Aequation $zz-mz+n=0$, wovon die radices seyn sollen a, b, so dass $a+b=m$ und $ab=n$, so wird der terminus generalis diese Form haben $P=\alpha a^x+\beta b^x$, folglich ist $Q=\alpha a.a^x+\beta b.b^x$. Aus diesen zwey Aequationen suche ich die valores a^x und b^x, und finde $\alpha a^x=\frac{bP-Q}{b-a}$, $\beta b^x=\frac{aP-Q}{a-b}$; diese multiplicire ich in einander $\alpha\beta\, a^x b^x = \frac{abPP - aPQ - bPQ + QQ}{-aa + 2ab - bb}$. Da nun $ab = n$, $a + b = m$, $-aa + 2ab - bb = -(a+b)^2 + 4ab = -m^2 + 4n$, so wird $\alpha\beta n^x = \frac{nPP - mPQ + QQ}{4n - mm}$, folglich $\frac{nPP - mPQ + QQ}{n^x} = \alpha\beta(4n - mm) =$ quantitati constanti, welche (posito $x = 1$) seyn muss $= \frac{nAA - mAB + BB}{n}$.

Wenn aber pro serie recurrente ist $D = mC - nB + pA$ und $S = mR - nQ + pP$, so formire ich diese Aequation $z^3 - mzz + nz - p = 0$, wovon die radices seyn sollen a, b, c, so wird $P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x$, $Q = \alpha a . a^x + \beta b . b^x + \gamma c . c^x$, $R = \alpha a^2 a^x + \beta b^2 b^x + \gamma c^2 c^x$. Aus diesen drey Aequationen suche ich die valores αa^x, βb^x, γc^x, welche in einander multiplicirt geben $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, weil $a + b + c = m$, $ab + ac + bc = n$ und $abc = p$; und durch Hülfe dieser Formuln lassen sich in der aequatione resultante die Buchstaben a, b, c durch m, n et p bestimmen und kommt die letzt überschriebene Aequation inter P, Q, R heraus.

Den Zweifel, welchen Ew. gegen meine Demonstration, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, machen, kann ich nicht recht einsehen, und glaube, dass ich mich entweder nicht deutlich genug ausgedrückt habe, oder dass Dieselben meine Demonstration auf einen andern casum gezogen.

Wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre (in integris), so würde es grad, und folglich per 4 divisibel seyn. Ferner, da $z^4 - 1 = (zz - 1)(zz + 1)$, muss das Quadrat auch per $zz - 1$ divisibel seyn, und auch per $(zz - 1)^2$, wenn $zz - 1$ keine factores quadratos hat. Dahero, wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre, so müsste dasselbe eine solche Form haben

$2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, wo qq die etwan in $zz - 1$ enthaltenen factores quadratos aufheben soll. Nun nehme ich billig an, dass pp und qq numeri inter se primi sind, oder dass die fractio $\frac{pp}{qq}$ schon ad minimos terminos reducirt sey. Denn wenn pp et qq einen divisorem communem hätten, so würde solches in der Fraction $\frac{pp}{qq}$ per divisionem weggebracht werden können. Wenn demnach $2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, so ist $2(zz + 1)(zz - 1)qq = 4(zz - 1)^2 pp$, und folglich $(zz + 1)qq = 2(zz - 1)pp$, woraus entstehet $zz = \frac{2pp + qq}{2pp - qq}$. Da nun zz ein numerus integer ist, so muss $2pp - qq$ ein divisor seyn von $2pp + qq$, folglich auch von $4pp$ oder von $2qq$. Da aber pp et qq numeri inter se primi sind, so kann solches nicht geschehen, als entweder wenn $2pp - qq = 1$, oder wenn $2pp - qq = 2$, denn da $\frac{2pp + qq}{2pp - qq} = 1 + \frac{2qq}{2pp - qq} = \frac{4pp}{2pp - qq} - 1$ und p et q numeri primi inter se, so ist auf keine andere Art möglich, dass $\frac{2pp + qq}{2pp - qq}$ ein numerus integer werde.

Es sey also I. (si fieri possit) $2pp - qq = 1$, so wird $zz = 2pp + qq = 4pp - 1$, welches in numeris integris unmöglich ist.

Wenn II. $2pp - qq = 2$, so wird $zz = \frac{2pp + qq}{2} = qq + 1$, welches gleichfalls nicht möglich ist. Also kann auf keinerley Art $2z^4 - 2$ in integris ein Quadrat werden.

Setzt man z für zz um zu suchen in welchen Fällen $2zz - 2$ ein Quadrat werden könne, so gibt es zweyerley Fälle I. $z = 4pp - 1$, und II. $z = qq + 1$, welches diejenigen sind, so Ew. anführen, die aber meine vorige Demonstration nicht entkräften, welche, so viel ich mich erinnere, generaler war; denn ich hatte bewiesen, dass nicht nur $2z^4 - 2$ sondern auch $2z^4 - 2u^4$ kein Quadrat seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine Demonstration nun im X. tomo Commentariorum gedruckt.

Das problema: Datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx, ut summa $aa + bb + xx$ alio quoque modo fiat resolubilis in tria quadrata, habe ich also solvirt: Sit

$$aa + bb + xx = (a + 2pr)^2 + (b + 2qr)^2 + (x - 2r)^2,$$

erit $0 = 4apr + 4pprr + 4bqr + 4qqrr - 4rx + 4rr$, unde per $4r$ dividendo fit $x = ap + ppr + bq + qqr + r$, wo pro p, q et r numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt. Woraus unendlich viel solutiones particulares fliessen. Als, es sey $p = 1$, $q = -1$, erit $x = a - b + r$ und

$$aa + bb + xx = (a + 2r)^2 + (b - 2r)^2 + (x - 2r)^2.$$

Meine Pièce über den Saturnum ist in Paris nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, dass man mit derselben sehr wohl zufrieden ist und sie allen andern, so eingelaufen, weit vorziehet.

Euler.

LETTRE CXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches précédentes.

St. Petersburg d 27. Januar 1748.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. am besten sehen, worauf mein voriges dubium gegründet gewesen.

Dero Solution des problematis: datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx hac lege, ut $aa + bb + xx$ plus quam uno modo sit summa trium quadratorum, ist offenbar und general; denn obzwar die aequatio

$$0 = 4apr + 4pprr + 4bqr + 4qqrr - 4rx + 4rr,$$

per $4r$ divisa nicht $x = ap + prr + bq + qrr + r$, sondern $x = ap + ppr + bq + qqr + r$ gibt, so hat doch dieser kleine error calculi keine influence in die Methode selbst. Indessen bleibet die Demonstration, dass eine summa trium

*