nigen sind, so Ew. anführen, die aber meine vorige Demonstration nicht entkräften, welche, so viel ich mich erinnere, generaler war; denn ich hatte bewiesen, dass nicht nur $2z^4-2$ sondern auch $2z^4-2u^4$ kein Quadrat seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine Demonstration nun im X. tomo Commentariorum gedruckt.

Das problema: Datis duobus quadratis $aa$ et $bb$, invenire tertium $xx$, ut summa $aa+bb+xx$ alio quoque modo fiat resolubilis in tria quadrata, habe ich also solvirt: Sit

$$aa+bb+xx=(a+2pr)^2+(b+2qr)^2+(x-2r)^2,$$

erit $0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr$, unde per $4r$ dividendo fit $x=ap+ppr+bq+qqr+r$, wo pro $p$, $q$ et $r$ numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt. Woraus unendlich viel solutiones particulares fliessen. Als, es sey $p=1$, $q=-1$, erit $x=a-b+r$ und

$$aa+bb+xx=(a+2r)^2+(b-2r)^2+(x-2r)^2.$$

Meine Pièce über den Saturnum ist in Paris nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, dass man mit derselben sehr wohl zufrieden ist und sie allen andern, so eingelaufen, weit vorziehet.

Euler.



# LETTRE CXII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches précédentes.

St. Petersburg d 27. Januar 1748.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. am besten sehen, worauf mein voriges dubium gegründet gewesen.

Dero Solution des problematis: datis duobus quadratis $aa$ et $bb$, invenire tertium $xx$ hac lege, ut $aa+bb+xx$ plus quam uno modo sit summa trium quadratorum, ist offenbar und general; denn obzwar die aequatio

$$0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr,$$

per $4r$ divisa nicht $x=ap+prr+bq+qrr+r$, sondern $x=ap+ppr+bq+qqr+r$ gibt, so hat doch dieser kleine error calculi keine influence in die Methode selbst. Indessen bleibet die Demonstration, dass eine summa trium quadratorum imparium vor $8m+3$ in quocunque casu ipsius $m$ angegeben werden könne, noch sehr dunkel. Es ist mir eingefallen, dass wenn man die drey radices quaesitas setzen möchte $A$, $B$, $C$, und

$$A = 1 + am + bmm + cm^3 + dm^4 + \text{etc.}$$
$$B = 1 + am - bmm - cm^3 - dm^4 - \text{etc.}$$

folglich

$$\begin{array}{llllll} AA = 1 + 2am & + 2bmm & + 2cm^3 & + 2dm^4 & + 2em^5 & + \text{etc.} \\ & + aa & + 2ab & + 2ac & + 2ad & \\ & & & + bb & + 2bc & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} BB = 1 + 2am & - 2bmm & - 2cm^3 & - 2dm^4 & - 2em^5 & + \text{etc.} \\ & + aa & - 2ab & - 2ac & - 2ad & \\ & & & + bb & + 2bc & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllll} CC = 1 + 8m & - 2aamm & * & - 2bbm^4 & - 4bcm^5 \\ \quad\; - 4a & & & & \end{array}$$

alsdann $AA + BB + CC = 8m + 3$ und alle coëfficientes $b$, $c$, $d$, etc. per solam $a$ determinirt werden könnten, so dass $a$ eine quantitas indeterminata bliebe, denn es wird posita

$$C = 1 + \alpha m + \beta mm + \gamma m^3 + \delta m^4 + \text{etc.}$$
$$\alpha = 4 - 2a,\quad \beta = -2aa - \alpha\alpha,\quad \gamma = -2\alpha\beta, \text{etc.}$$

hieraus würde ferner folgen, dass wenn das theorema an sich selbst wahr ist, die series $A$, $B$, $C$ allezeit numeris integris gleich seyn würden, man möchte auch vor $a$ annehmen, was man wollte.

Goldbach.



# LETTRE CXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches précédentes. Théorème de géométrie.

Berlin d. 25. Februar 1748.

Das über meinen vorigen Brief gehabte dubium wird sogleich wegfallen, wenn Ew. sich zu erinnern belieben werden, dass daselbst von numeris integris die Rede sey, denn da $P = 4pp - 1$, so kann in ganzen Zahlen $P$ unmöglich ein Quadrat seyn; in Brüchen aber wäre solches auf unendliche Arten möglich.

Dass alle in dieser Formul $8m+3$ enthaltenen Zahlen in drey quadrata imparia resolvirt werden können, bin ich noch keineswegs im Stand zu beweisen, ungeacht ich mir darüber den Kopf schon ziemlich verbrochen habe. So oft $8m+3$ ein numerus primus ist, so ist dieselbe allzeit in dieser Form $2aa + bb$ enthalten, als $3 = 2.1 + 1$;