cubus, noch eine summa duorum biquadratorum ein biquadratum, noch in genere eine summa duarum potestatum altiorum eine gleiche potestas seyn. Er sagt, dass er dafür eine sehr ingenieuse Demonstration habe, welche er aber wegen Mangel des Raums nicht beysetzen könne. Es ist also sehr schad, dass auch diese nebst vielen andern verloren gegangen.

Ich bin neulich auf nachfolgendes theorema geometricum gefallen, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet. Nehmlich, gleich wie in einem jeden parallelogrammo die summa quadratorum laterum der summae quadratorum diagonalium gleich ist, so ist in einem jeden quadrilatero non parallelogrammo die summa quadratorum laterum grösser als die summa quadratorum diagonalium, und der excessus kann also concinne angegeben werden: Man bisecire (Fig. 28) in dem trapezio $ABCD$ die diagonales AC und BD in N et M und jungire die Linie MN, so wird seyn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Euler.

LETTRE CXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE Suite des recherches arithmétiques.

St Petersburg d. 6. April 1748.

In Ew. Schreiben vom 2. Sept. hatte ich die Worte: *dass P um 1 immer kleiner als ein Quadrat seyn muss*, für eine zur vorhergehenden Formul $Q = P + \sqrt{(2PP \pm 2)}$ gehörige Condition angesehen, welche sich aber, wie ich nunmehro finde, blos auf die Aequation $zz = 4pp - 1 = P$ rapportiren, so dass alles seine Richtigkeit hat.

Wenn Ew., wie Sie vermuthen, demonstriren könnten, dass alle numeri $8m + 3$, wenn sie primi sind, zu dieser Formul $2aa + bb$ gebracht werden können, so werden Sie auch leicht finden, dass alle numeri primi $4m + 3$ zu dieser Formul gehören $2aa + bb + cc$, weil dieselbe meines Erachtens alle numeros impares in sich begreift; wenn aber solches nur von allen numeris primis demonstrirt wäre, so würde offenbar seyn, dass alle numeri integri affirmativi aus vier quadratis bestehen.

Was die transmutationes einer summae quatuor quadratorum betrifft, so habe ich derselben unterschiedene gefunden, welche ich folgendergestalt exprimiren will, dass $\triangle$ einen numerum trigonalem, $2\triangle$ ein duplum trigonalis, $3\triangle$ ein triplum etc. $\square + \square$ ein aggregatum duorum quadratorum, $2\square$ ein duplum quadrati etc. bedeuten; solchemnach wird eine jede Zahl seyn:

I. $2\square + \square + 4\triangle$; IV. $2\square + \square + \triangle$;

II. $\square + 2\square + 2\triangle$; V. $\square + \triangle + 4\triangle$;

III. $\square + 2\triangle + 4\triangle$; VI. $2\square + \triangle + 2\triangle$;

VII. $\triangle + 2\triangle + 4\triangle$;

VIII. $\square + \square + 2\triangle$;

IX. $\dfrac{\square + \square + \square}{2}$;

aus welchen noch viele andere deducirt werden können.

In der nachfolgenden Formul

$$aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$$

ist offenbar, dass selbige eine summa quatuor quadratorum wird, wenn $d = -a - b - c + 1$; wenn aber auch d pro numero quocunque genommen wird, muss die formula dennoch eine summa quatuor quadratorum seyn. Sollte mir etwas Neues von dieser Materie einfallen, werde ich das Vergnügen haben selbiges Ew. zu communiciren.

Goldbach.

P. S. Wenn die numeri a, b, c in casu

$$2aa + bb + cc = 2n + 1$$

gegeben sind, so können daraus die vier quadrata pro summa $2n + 3$, $4n + 3$, $6n + 3$, $4n + 6$, $8n + 6$ etc. imgleichen vor $2n + 2pp + 1$, $4ffn + 2ff + dd$, allwo p, f, d numeri integri quicunque sind, leicht angegeben werden, und diese formula $2aa + 4bb + (2c + 1)^2 + 2$ ist allezeit gleich einer andern $2AA + 4BB + (2C + 1)^2$, von welcher letztern Proposition aber die demonstratio rigorosa fehlt.