LETTRE CXV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 4. Mai 1748.

Wenn der Satz wahr ist, dass $8m+3=2aa+bb$, so oft $8m+3$ ein numerus primus ist, so sehe ich nicht, dass auch immer seyn müsse $4n+3=2aa+bb+cc$, so oft $4n+3$ ein numerus primus ist; es wäre denn, dass man beweisen könnte, dass in diesem Fall immer wäre $4n+3=8m+3+4(2p+1)^2$. Vielleicht aber ist dieses sogar wahr, wenn auch $4n+3$ kein numerus primus ist. Zum wenigsten däucht mich, dass $8n+7=(8m+3)(2q+1)^2+4(2p+1)^2$, existente $8m+3$ numero primo. Wäre nun dieses wahr, so würden freylich alle numeri primi, und folglich alle Zahlen summae quatuor quadratorum seyn. Allein ich glaube kaum, dass sowohl bey diesem als bey

andern Fermatianischen theorematibus mit General-Formuln etwas auszurichten ist. Denn was das theorema anlangt, dass eine jegliche Zahl eine summa trium trigonalium sey, so ist solches nur von numeris integris zu verstehen, und würde daher sogar unmöglich seyn diesen Generalsatz

$$n=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$$

zu beweisen, weil derselbe sogar in viel Fällen, nehmlich wenn $n=\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{2}$, oder $\frac{5}{2}$ etc. falsch wäre. Denn wenn dieser Satz auch für gebrochene Werthe von n wahr wäre, so würde eine jegliche Zahl sogar eine summa trium quadratorum seyn können, indem $8n+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, und $8n+3$ alle Zahlen in sich begriffe. Also kann Ew. IX. Formul, kraft welcher eine jede Zahl seyn soll $=\frac{\square+\square+\square}{2}$, wofern kein Schreibfehler darin befindlich, nicht Statt finden; denn wenn quivis numerus $n=\frac{\square+\square+\square}{2}$, so würde quivis numerus par $2n=\square+\square+\square$, welches doch bey unendlich vielen, als 28, 60 etc. nicht angeht. Hingegen kommt mir die VIII. Formul $n=\square+\square+2\triangle$ sehr merkwürdig vor, von deren Wahrheit ich durch die Induction bin überführt worden, ungeacht ich nicht sehe, wie dieselbe aus dieser $n=\square+\square+\square+\square$, oder dieser $n=\triangle+\triangle+\triangle$ folget.

Die Formul $aa-a+bb-b+cc-c+dd-d+1$ ist generaliter, und also nicht allein in dem Fall da $a+b+c+d=1$, eine summa quatuor quadratorum; denn dieselbe ist =

$$\left(a-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(c-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(d-\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Denn ungeacht diese quadrata fracta sind, so ist doch gewiss, omnem numerum, qui sit summa quatuor quadrator. fractorum, eundem in integris esse 4 quadratorum summam. Folgendes theorema kann auch dienen in vielen Fällen die quatuor quadrata selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammengesetzt ist: Si $m = aa + bb + cc + dd$ et $n = pp + qq + rr + ss$ erit $mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ existente

$$A = ap + bq + cr + ds$$
$$B = aq - bp - cs + dr$$
$$C = ar + bs - cp - dq$$
$$D = as - br + cq - dp.$$

Weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s sowohl affirmative als negative annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit einander combiniren oder ihre Ordnung verändern kann, so ist die resolutio producti mn auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

Meines Erachtens ist also nicht leicht eine Demonstration von dergleichen Fermatianischen theorematibus zu erwarten, so lang man die numeros trigonales, tetragonales, pentagonales etc. durch die gewöhnlichen Generalformuln ausdrückt, weil in denselben auch die numeri fracti mit begriffen sind, welche doch in den meisten theorematibus ausgeschlossen werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Sach folgendergestalt vorgestellt:

Es sey $s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.}$, wo keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle$. Wenn man nun das quadratum dieser seriei nimmt, so wird $ss =$ einer seriei, in der keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle + \triangle$, und s^3 wird gleich einer seriei, da der Potestäten ipsius x Exponenten sind $= \triangle + \triangle + \triangle$. Wenn man nun beweisen könnte, dass in der serie s^3 alle pote-

states ipsius x vorkommen, so wäre dieses ein Beweis omnem numerum integrum esse summam trium trigonalium. Diese series lassen sich aber leicht generaliter bestimmen; denn es sey

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \text{etc.}$$

so sind die valores dieser Coëfficienten für die verschiedenen valores von n, wie folgt:

	1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	α	β	γ	δ	ε
Si $n = 1$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
		1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
				1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
							1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
											1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
																	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
																							1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
Si $n = 2$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0	2			
		1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0			
				1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2			
							1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4			
											1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0			
																	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1			
																							1	2	1	2	2	0	3			
Si $n = 3$	1	3	3	4	6	3	6	9	3	7	9	6	9	9	6	6	15	9	7	12	3	15	15	6	12	12	9	12	etc.		

Wenn man also zeigen könnte, dass in dieser serie pro $n = 3$ kein terminus $= 0$, so wäre bewiesen, dass eine jede ganze Zahl eine summa trium trigonalium ist. Gleich wie man aus der serie $n = 2$ siehet, da viel termini $= 0$, dass viel Zahlen auch nicht summae duorum trigonalium sind, nehmlich 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, etc.

Auf gleiche Weise kann auch die Composition numerorum ex quadratis vorgestellt werden; denn ich setze zu diesem Ende

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + \text{etc.}$$

und

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}$$

Hier werden nun die coëfficientes singularum potestatum ipsius x pro valoribus ipsius n successive folgendergestalt gefunden:

Exponentes ipsius x......	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	etc.
Coëfficientes casu $n=1$	1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	etc.
dazu addire		1.	1	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
					1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
										1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=2$	1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	2.	
		1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	
					1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	
										1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=3$	1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	3.	
		1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	
					1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	
										1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	
																	1.	
	1.	4.	6.	4.	5.	12.	12.	4.	6.	16.	18.	12.	8.	16.	24.	12.	5.	

Hier kommen in der serie für $n = 2$ noch häufig 0 vor, als bey 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, welches ein Zeichen ist, dass diese Zahlen nicht sind $\square + \square$. In der serie $n = 3$ findet

sich die 0 bey den Zahlen 7, 15, dahero diese Zahlen nicht summae trium $\square$ sind, in der serie $n = 4$ aber kommt keine 0 mehr vor. Dahero müsste nur dieses bewiesen werden können.

Auf beyliegendem Zettel habe ich die verba Fermatii über seine demonstrationes theorematum copirt, woraus man ungefähr merken kann, aus was für Gründen dieselben hergeleitet waren, und eben deswegen ist der Verlust derselben meines Erachtens um so viel mehr zu bedauern.

Hier gehet das Gerücht, dass von der Akademie zu Paris für dieses Jahr der ganze Preis mir zuerkannt worden, worüber vielleicht morgen die Nachricht selbst erhalten werde.

Euler.

(Billet annexé:)

Fermatius in Observationibus ad Diophantum. Imo propositionem generalem et pulcherrimam nos primi deteximus, nempe omnem numerum (integrum) vel esse triangularem, vel ex 2 vel 3 triangularibus compositum: Item vel esse quadratum vel ex 2, vel 3, vel 4 quadratis compositum; item esse vel pentagonum, vel ex 2, vel 3, vel 4, vel 5 pentagonis compositum, et sic in infinitum. Hujus autem propositionis demonstrationem, quae ex multis, variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet. Opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hac in parte ultra veteres ac notos terminos mirum in modum promovere.