und observire hiebey annoch, dass wenn von den quatuor lateribus (Fig. 29) AB, BC, CD, DA eines durch einen numerum impariter parem, und die drey übrigen durch numeros impares exprimiret werden, alsdann die drey quadrata $AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ unmöglich aus numeris integris bestehen können.

Die Solution des problematis catoptrici durch Hülfe einer curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemerket, dass in der formula $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ in casu $y =$ applicatae maximae, allezeit seyn müsse $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, hingegen kann ich mir nicht recht vorstellen, wie die curva aussehen müsse, wenn man (Fig. 32) das spatium EM a vertice E usque ad applicatam maximam MP interceptum ganz klein, als $\frac{a}{1000}$ annimmt, und schliesse daraus, dass eben dieses spatium EM gewisse limites haben werde.

Goldbach.

LETTRE CXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Accord des tables lunaires d'Euler avec l'observation de l'éclipse du soleil. Examen du théorème numérique de Goldbach. Introduction à l'analyse des infinis et Science navale. Action de la comète de 1744 sur le cours de Mercure. Observations sur le quadrilatère et la courbe catoptrique.

Berlin d. 6. August 1748.

Nachdem uns allhier der Himmel ziemlich günstig gewesen, um neulich die Sonnenfinsterniss sehr genau zu beobachten, so habe ich Ursach mit meinen neuen tabulis lunaribus vollkommen zufrieden zu seyn. Denn sowohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine Minute mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur 15″ und das Ende 30″ später bemerket worden, als ich angesetzet hatte. Insonderheit aber war diese Finsterniss würklich annularis, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die andern tabulae, welche doch für die besten gehalten werden, keinen annulum anzeigten, sondern auch einige HH. Pariser astronomi meine Rechnung durch einige bey den tabulis angebrachte vermeinte correctiones widerlegen und behaupten wollen, dass diese Finsterniss allhier nur partialis seyn würde. Die nach den übrigen tabulis lunaribus angestellten Rechnungen haben sowohl im Anfang als Ende um 2, 3 ja bis auf 10 Minuten gefehlt. Uebermorgen werde ich sehen, wie genau meine Rechnung bey der Mondfinsterniss eintreffen wird.

Was die Formul $8n+2=(2\pm2)^{e+1}+\Box+\Box$ betrifft, so kann ich zwar keinen casum in contrarium entdecken, ich sehe aber doch die Wahrheit davon nicht ein. Hingegen kann ich diese Formul $8n+1=(1\pm1)^{2e}+(1\pm1)^{2f}+\Box$ nicht zugeben, wofern dieselbe so viel anzeigen soll, dass eine jede Zahl von dieser Form $8n+1$ allzeit in drey dergleichen quadrata zertheilet werden könne, wovon zwey zugleich potestates binarii seyen, *cyphra non exclusa*. Denn wenn $8n+1=217$, so findet diese Formul nicht Statt.

Wenn es gewiss, dass $8n+2=(1\pm1)^{2e+2}+\Box+\Box$, so folget von selbsten, dass $4n+1=(1\pm1)^{2e+1}+\Box+\Box$, wenn man nur jene durch 2 dividirt, weil $\frac{\Box+\Box}{2}=\Box+\Box$. An der Wahrheit dieser gedoppelten Formul $4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC$ und dass allzeit seyn könne $A=a+1$, finde ich keine Ursach zu zweifeln; ich kann aber eben so wenig den Grund davon einsehen. Indessen sind solche Sätze, welche durch kein Exempel refutirt werden können, freylich um so viel mehr merkwürdig.

Für die gütige Communication der Demonstrationen der mir letzt überschriebenen schönen Eigenschaften der Zahlen sage ich allerschuldigsten Dank, und es freut mich nicht wenig, dass die selbenmit denen, so ich herausgebracht, so schön übereinstimmen.

Die Introductio in analysin infinitorum, welche mir die Ehre gegeben Ew. zu praesentiren, ist schon seit drey Jahren unter der Press gewesen und anjetzo wird von Mr. Bousquet meine Abhandlung vom Calculo differentiali gedruckt.

Weil die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften ihren Anspruch auf meine Scientiam navalem erneuert, so habe ich letztens das ganze Werk an des Herrn Präsidenten Exc. überschicket und ersuche Ew. bey Gelegenheit etwan den Druck derselben durch Vorstellungen bey dem Hn. Schumacher gütigst beschleunigen zu helfen; insonderheit da in des Hn. Bouguer's Werk von dieser Materie schon ziemlich viel enthalten, was ich darüber herausgebracht habe, und da meine principia, worauf die ganze Sache beruhet, je länger je mehr bekannt werden, so befürchte ich, dass gar Alles anderwärts herauskommen möchte, wenn der Druck meines Werks nicht bald zu Stande kommt. Von dem erwähnten neuen Planeten, welcher alle 4 Jahre seinen Lauf vollenden soll, ist nicht nur nichts Neues entdeckt worden, sondern ich bin versichert, dass der Auctor desselben nicht genugsam in der theoria planetarum et cometarum erfahren gewesen, dass er aus den Observationen einen solchen Schluss hätte machen können.

Nachdem ich den locum Mercurii auf die Zeit des Cometen A. 1744 genauer berechnet, so habe gefunden, dass derselbe dem Cometen nicht so nahe gewesen, als ich anfänglich gemeinet hatte, und dass folglich in seinem Lauf keine Alteration hat entstehen können.

Wenn die 4 latera trapezii also durch Zahlen ausgedruckt werden, dass eines ein numerus impariter par, die drey übrigen aber numeri impares sind, so wird die summa quadratorum laterum eine solche Zahl $8n+7$, und kann folglich rationaliter nicht in drey quadrata resolvirt werden.

Ew. dubium gegen die figuram curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans ist, kann ich nicht genug einsehen. Es sey (Fig. 31) EAF eine solche curva, wo die recta utrinque normalis $EF=2a$, die abscissa $AP=x$, die applicata $PE=y$, und P eine functio rationalis von p, so habe gefunden, dass $x=\int p\,dP-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, und $y=P+\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hieraus wird $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{p}$ und folglich die applicata y maxima, wenn $\frac{dy}{dx}=0$, d. i. wenn $p=\infty$. Nun kann aber für P eine solche functio von p angenommen werden, dass in diesem Fall eben nicht wird $P=-ap+a\sqrt{(1+pp)}$, oder $P=0$, weil $p=\infty$. Hingegen wird die applicata maxima seyn $=P+a$, wenn in P gesetzt wird $p=\infty$, und die abscissa wird $x=\int p\,dP$.

Euler.

LETTRE CXX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente. Deux théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 7. September 1748.

Die in Charten vorgestellte Sonnenfinsterniss und die dazu gehörige gedruckte Beschreibung sind mir Tages zuvor und also noch zu rechter Zeit eingehändigt worden, vor deren Uebersendung ich Ew. schuldigsten Dank sage, wie ich denn Deroselben zugleich zu der genauen Uebereinstimmung dieser Sonnenfinsterniss mit Dero tabulis astronomicis von Herzen gratulire und ein Gleiches von der letztverwichenen Mondfinsterniss zu erfahren hoffe. Ich habe auch nicht unterlassen gehörigen Ortes die verlangte Erinnerung wegen der Scientiae navalis zu thun, und zuverlässig vernommen, dass man, wie mir schon vorhero bekannt war, und Ew. ohne Zweifel bereits von Andern werden erfahren haben, mit dem Druck dieses Werkes eifrigst fortfährt.