I. Si distantia verticis A a puncto radiante C vocetur b, et abscissa CR sit $= x$, applicata huic abscissae respondens $MR = y$, datae per x, semper invenietur spatium interceptum CR maximum, si ponatur $CR = x = V(aa - 2ay)$.

II. Si in axe curvae α sumatur $\alpha F = F\beta = a$, erit in curva A spatium $CF = a - 2b$ minimum omnium, inter punctum radians C et radium ad axem reflexum interceptorum, ita ut locus radiorum ad axem reflexorum sit inter F et R.

Uebrigens habe ich auch bemerket, dass so oft in dieser Aequation $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta + 4 = AA + BB + CC$ alle numeri integri, qui his litteris designantur, bekannt sind, in der folgenden Aequation

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 = PP + QQ + RR + SS$$

die numeri P, Q, R, S angegeben werden können. Sit ex. gr. $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$, $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, erunt $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.

Goldbach.

LETTRE CXXIII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur la courbe catoptrique.

Berlin d. 4. März 1749.

Weil es bey der bekannten curva catoptrica darauf ankommt, dass man eine curvam finde, deren normales utrinque secantes allenthalben constantis magnitudinis seyen, so habe in beygefügter Figur (Fig. 36) eine solche curvam $CMEADNBEC$ mit allem Fleiss aufgerissen, in welcher alle diese normales, CD, MN, IB, EE, AK gleich gross sind, und merke dabey zuvörderst an, dass es auch solche curvas gebe, welche gar keinen diametrum haben; von der beygefügten aber ist CD ein diameter. Hat man eine solche curvam gefunden, so kann man nach Belieben das punctum radians F entweder im axe oder ausser demselben annehmen und daraus leicht die curvam catoptricam GLH beschreiben. Man zieht nehmlich aus dem puncto radiante F ad quodvis curvae prioris punctum M, die Linie FM, schneidet dieselbe in T in zwey gleiche Theile, richtet darauf in T die Perpendicularlinie TL auf, bis sie die normalem MR in L durchschneidet, so ist L ein punctum in der Catoptrica und LT die tangens daselbst. Wenn nun das punctum radians F in dem axe oder diametro CD curvae generatricis angenommen worden, so wird auch die Linie GH ein diameter der curvae catoptricae selbst seyn; sonsten aber, wenn F nicht wäre in axe CD genommen worden, oder wenn die curva generatrix CAB gar keinen diametrum hätte, so würde sich auch in der curva catoptrica kein diameter befinden. Also ist es gewiss, dass so oft die curva catoptrica GLH einen diametrum hat, auch die curva generatrix CAB ebendenselben diametrum haben werde, aber nicht vicissim; und dahero finden Ew. Anmerkungen nur alsdann Statt, wenn die curva catoptrica einen diametrum hat.

Das punctum radians F mag angenommen werden wo man will, wenn man durch dasselbe ad curvam generatricem die normalem zieht CFD, und die partes CF und DF in zwey gleiche Theile schneidet, so bekommt man die puncta G und H in der Catoptrica.

Wenn die curva generatrix CAB einen diametrum hat, als CD, und Ed die grösste applicata ist, weil $Ed = dE$ und ad curvam normalis, so muss $EE = CD$, und also $dE = \frac{1}{2} CD$ seyn. Es sey $CD = 2a$, so wird die applicata maxima $dE = a$. Wenn also in der curva catoptrica gesetzt wird $Fd = x$, $dq = y$, so ist

$$Fq = Eq = \sqrt{(xx + yy)} = a - y,$$

und folglich $x = \sqrt{(aa - 2ay)}$, wie Ew. in der ersten Anmerkung gefunden, und in diesem Fall ist das spatium Fd maximum vel minimum inter punctum radians F et radium reflexum: in meiner Figur nehmlich ist es maximum; es würde aber minimum seyn, wenn ich das punctum radians F auf der andern Seite gegen D angenommen hätte. Gleichwie aber in der Figur das spatium FR in Fd ein maximum wird, so ist hingegen Fc der valor minimus desselben, wenn cC der radius osculi curvae generatricis in C, und folglich cD der radius osculi in D ist. Also fällt dieser Punct c nicht nothwendig in die Mitte des diametri CD; vielmehr wird aus Folgendem erhellen, dass dieser Punct c niemal in die Mitte der Linie CD falle, als wenn die curva generatrix CAB ein Circul ist, in welchem Fall die catoptrica eine ellipsis wird. Denn wenn die curva generatrix in se rediens et quasi circuliformis seyn soll, so muss ihre evoluta cab eine curva tricuspidata seyn, dergleichen unendlich viel gefunden werden können, sowohl triangulis aequilateris als scalenis inscriptibiles. Hiebey ist merkwürdig, dass wenn man eine solche curvam tricuspidatam abc gefunden, aus derselben Evolution, nachdem man den Faden länger oder kürzer annimmt, unendlich viel curvae generatrices CAB beschrieben werden können. Denn wenn Cc nach Belieben angenommen wird, so ist immer $mM = Cc + cm$ und $bL = Cc + cmb$, $Aa = Cc + cmb - adb$ und $cD = Cc + cmb + anc - adb$. Weil nun $cmb + anc$ nothwendig grösser ist als adb, so kann auch cD nimmer dem Cc gleich werden, folglich das Punct c nicht in die Mitte von CD fallen.

Um ein Exempel von einer solchen curva tricuspidata zu geben, welche rectificabel ist, damit sowohl die curvae generatrices als catoptricae algebraicae werden, so sey $cp = t$,

$pm = u$ und man nehme $t = \frac{3c(1+3pp)}{(1+pp)^2}$ und $u = \frac{6cp}{(1+pp)^2}$, woraus wenn man p eliminirt eine Aequation von sechs Dimensionen $4uu(tt+uu)^2 = 12ctuu(uu+9tt) - 243cct^4$ entspringt, darin ist $\frac{dt}{du} = p$. Pro puncto d ist $p = 0$, und also $cd = 3c$. Diese curva ist triangulo aequilatero inscriptibilis, cujus latus $ac = ab = bc = \frac{9\sqrt{3}}{4}c$. Ferner ist diese curva rectificabilis, denn es wird der arcus

$$cm = \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + 2c,$$

und da pro cuspidibus a et b est $p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der Bogen $cmb = cna = adb = 4c$. Wenn also genommen wird $Cc = b$, so wird $cD = b + 4c$; ferner

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

weil $2a = 2b + 4c$. Nun aber ist $pR = pu = \frac{6cpp}{(1+pp)^2}$ und $Rm = u\sqrt{(1+pp)} = \frac{6cp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. At $MR = a - \frac{2cp^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; dahero findet man pro curva generatrice die abscissa

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c(1-pp)}{(1+pp)^2}$$

und die applicata

$$PM = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{2cp^3}{(1+pp)^2},$$

wobey ich nur anmerke, dass wenn man in einem Circul, dessen radius $= a = \frac{1}{2}CD$, den Bogen (qui est mensura anguli CRM) setzt $= s$, so wird in der curva generatrice der arcus $CM = s + \frac{\frac{2}{3}c(1-3pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also ist der perimeter

totius curvae $CABC$ accurat gleich der Peripherie eines Circuls, cujus diameter $= CD$. Diese Eigenschaft ist allen curvis, so ex evolutione curvarum tricuspidatarum quarumcunque entstehen, gemein, indem immer der ganze perimeter derselben der peripheriae eines circuli diametro $= CD$ descripti gleich ist. Dieser Circul ist in der Figur punctirt gezeichnet. Der excessus areae circuli supra aream curvae ist nun in gegenwärtigem Fall gleich der areae circuli, cujus diameter $= c = \frac{1}{4}cna = \frac{1}{3}cd$.

Weil nun aus dieser einigen evoluta abc, welche zugleich immer die caustica der daher entstehenden catoptricarum ist, unendlich viel curvae generatrices ABC, und aus jeder generatrice, pro loco puncti radiantis F arbitrario, unendlich viel catoptricae entstehen, so kommen aus einer caustica abc unendlich mal unendlich viel catoptricae, alle algebraicae.

Wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$, so ist $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = A^2 + B^2 + C^2 + (\delta - 2)^2$, welches seyn soll $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, ist also offenbar $P = A$, $Q = B$, $R = C$ und $S = \delta - 2$.

Euler.