LETTRE CXXVI.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Courbe catoptrique. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. April 1749.

Hiebey habe die Ehre, meine Figur von den curvis catacausticis wiederum zurückzusenden, und weil dieselbe nicht accurat genug gerathen, indem freylich die Bögen AE und BE, wie Ew. angemerkt, gleich seyn sollten, so füge noch eine andere Figur hinzu (Fig. 37), welche ich mit mehrerem Fleisse aufgezeichnet. Indessen ist, wie in der vorigen, die curva tricuspidata abc aequilatera und die drey partes adb, bmc, cna unter sich aequales et similes. Diese curva hat also ein centrum in O, welches das centrum circuli triangulo abc circumscripti ist. Dieses Punct O ist aber nicht das Mittelpunct der Linie CD, welches Ew. mit dem Buchstaben r

andeuten wollen, denn aus der Natur der Evolution ist CD der Faden, welcher vorher um den Bogen cna gelegen und bis in A ausgedehnt gewesen, folglich ist
$cD =$ Arc. $cna + Aa =$ Arc. $cna + Cc$ (ob $Cc = Aa = Bb$) und also $cD + Cc = CD =$ Arc. $cna + 2Cc$. Wenn nun das Punct r in der Mitte der Linie CD genommen wird, so ist $Cr = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$ Arc. $cna + Cc$, und dahero $cr = Cr - Cc = \frac{1}{2}$ Arc. $cna = cn$. Nun aber ist in der Figur cO grösser als der Bogen cn, und also $cO > cr$ (ich habe nehmlich die puncta d, m, n in der Mitte der Bögen ab, ac, bc angenommen). Hernach sind freylich die Linien OI und OK nicht nur einander gleich, sondern machen auch mit OC gleiche Winkel. Denn es ist $OI = OK = OD$; allein, weil das Punct O nicht in die Mitte der Linie CD fällt, so sind auch diese drey Linien OI, OK, OD nicht so gross als CO oder AO und BO. Dieses ist auch aus der Auswickelung offenbar, da der anfänglich gelegte Faden $bmcC$ in bOI nach der geraden Linie ausgedehnt wird. Also ist $bI = bmc + Cc$, und $OI = bmc + Cc - bO$. Nun aber ist $Cc = OC - cO$ und daher $OI = bmc + OC - cO - bO$, oder weil $bO = cO$, so ist $OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2(cO - cm)$, und da $cO > cm$ so ist $OI < OC$. Wenn daher aus dem centro O mit dem radio $OC = OA = OB$ ein Circul beschrieben wird, so berührt derselbe die curvam descriptam in drey Puncten C, A, B, und diese curva hat also drey Bückel in A, B, C und drey Tiefen I, D, K, kann also trigibba genannt werden. In der vorigen Figur war der Circul aus dem centro r beschrieben, welchen hier gleichfalls bezeichne, woraus ganz klar zu sehen, wie dieser Circul die curvam trigibbam in zwey Puncten berührt und in zweyen durchschneidet; wie denn auch dieser Circul und

die curva trigibba ejusdem perimetri, folglich die area curvae kleiner als die area des Circuls seyn muss.

Ich füge noch eine neue Figur hinzu, (Fig. 38) in welcher die curva tricuspidata abc nicht aequilatera, sondern scalena, aus welcher auch eine curva trigibba scalena ABC entstehet. Ungeacht es solche curvas continuas oder aequatione exprimibiles gibt, so kann man doch auch von freyer Hand ohne einige Regel solche curvas tricuspidatas aufreissen und aus denselben per evolutionem die curvas trigibbas beschreiben, aus welchen hernach weiter auf unendlich vielerley Arten die gesuchten curvae catoptricae construirt werden können. Wie ich denn in dieser Figur die curvam tricuspidatam abc aus drey Circulbögen ab, ac, bc, so einander berühren, formirt, und daraus die trigibbam also gezeichnet habe, nachdem ich die tangentes ad cuspides a, b, c und puncta laterum media l, m, n gezogen und aA pro arbitrio angenommen, so wird $mM = ma + aA$, $c\gamma = cm + mM$, $l\lambda = c\gamma - cl$, $bB = l\lambda - lb$, $nN = nb + bB$ etc. bis man herumkommt.

Ich bin neulich auf diese Betrachtung gefallen, ob es nicht möglich sey zwey Zahlen x und y zu finden, so dass $xy(x+y)$ einer gegebenen Zahl a gleich sey; oder proposito numero a, invenire duos numeros rationales x et y (sive integros, sive fractos) ut sit $xy(x+y) = a$. Solches ist immer möglich, so oft die Zahl a in dieser Form

$$pq(pm^3 \pm qn^3)$$

enthalten ist. Ich glaube aber, dass in dieser Form bey weitem nicht alle Zahlen enthalten sind, und also das problema öfters unmöglich ist, welches zu geschehen scheint, wenn $a = 1$, oder $a = 3$ etc.

Wenn aber dieses problema proponirt wird:

Proposito numero a, invenire tres numeros rationales x, y, z, ut sit $xyz(x+y+z) = a$, so ist das problema immer möglich und kann sogar in genere die Solution angegeben werden, welche ich endlich nach vieler angewandter Mühe herausgebracht. Nehmlich man setze (sumendo pro s et t numeros quoscunque pro lubitu)

$$x = \frac{6ast^3(at^4 - 2s^4)^2}{(4at^4 + s^4)(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)},$$

$$y = \frac{3s^5(4at^4 + s^4)^2}{2t(at^4 - 2s^4)(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)},$$

$$z = \frac{2(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)}{3s^3t(4at^4 + s^4)},$$

so wird

$$x + y + z = \frac{2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8}{6s^3t(at^4 - 2s^4)}$$

und hieraus bekommt man $xyz(x+y+z) = a$.

Als es sey $a = 1$ und man nehme $t = 2$, $s = 1$, so wird

$$x = \frac{48.14^2}{65.671}, \quad y = \frac{3.65^2}{56.671}, \quad z = \frac{2.671}{6.65};$$

daher

$$x + y = \frac{1350723}{56.65.671} = \frac{3.671^2}{56.65.671} = \frac{3.671}{56.65}$$

und

$$x + y + z = \frac{671}{3.56},$$

folglich

$$xyz(x+y+z) = \frac{48.14^2}{65.671} \cdot \frac{3.65^2}{56.671} \cdot \frac{671}{3.65} \cdot \frac{671}{3.56} = 1.$$