P. S. Wenn das signum $\boxed{4}$ eine summam entweder von vier oder von weniger quadratis, und $\underset{|}{\boxed{4}}$ eine summam nicht von wenigern als 4 quadratis bedeutet, so kann gar leicht demonstriret werden omnem numerum hujus formae $8m+7$ esse $\underset{|}{\boxed{4}}$; wenn aber zugleich nachgegeben wird, dass alle numeri $\underset{|}{\boxed{4}}$ in dieser formula begriffen sind: $4^{e-1}(8m+7)$, ubi e sit numerus integer affirmativus quicunque, so kann demonstriret werden numerum quemcunque esse $\boxed{4}$.

LETTRE CXXVIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Nouveau travail sur la théorie de Saturne. Considérations ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 26. Juli 1749.

Ueber die Pariser Frage von den courans habe ich nicht gearbeitet, und vernommen, dass nur eine einige Schrift darüber soll eingelaufen seyn. Ich zweifle auch sehr, ob ich künftiges Jahr etwas Tüchtiges darin hervorzubringen im Stande seyn werde. Auf die wiederholte Frage aber vom Saturno habe ich schon eine neue Abhandlung übersandt, worüber auch künftige Ostern das Urtheil gefället werden soll.

Ew. theorema, dass wenn $8m+4$ eine summa quatuor quadr. imparium ist, eben diese Zahl $8m+4$ auch eine summa quatuor quadr. parium seyn müsse, kann ich auf folgende Art demonstriren:

*

Es sey

$$8m + 4 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 + (2d + 1)^2,$$

so wird, (wenn man durch 2 dividirt, da $\frac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2} = (p + q + 1)^2 + (p - q)^2$):

$$4m + 2 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2 + (c + d + 1)^2 + (c - d)^2,$$

also $4m + 2 = 4\square$. Da aber $4m + 2$ ein numerus impariter par ist, so müssen von diesen vier quadratis zwey paria und zwey imparia seyn. Also wird seyn:

$$4m + 2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 + 4rr + 4ss,$$

dahero

$$2m + 1 = (p + q + 1)^2 + (p - q)^2 + (r + s)^2 + (r - s)^2,$$

folglich

$$8m + 4 = 4(p + q + 1)^2 + 4(p - q)^2 + 4(r + s)^2 + 4(r - s)^2.$$

Q. E. D.

Hieraus folget, dass wenn $2A$ eine summa quatuor quadratorum ist, auch A eine summa quatuor quadratorum in integris sey, und generalius: Si $2^n A = 4\square$, tum etiam A erit $= 4\square$ in integris; oder: Si in fractis habetur $A = \frac{aa+bb+cc+dd}{2^n}$, tum etiam numerus A in integris in quatuor quadrata resolvi poterit.

Dieses ist nun schon ein Stück von dem allgemeinen theoremate: Si summa quatuor quadratorum fractorum aequatur numero integro A, tum etiam hic numerus erit in integris summa quatuor quadratorum; oder von diesem, worauf ich meine ganze vorige Demonstration gegründet: Wenn $mA = 4\square$ und $m = 4\square$, tum etiam erit $A = 4\square$. Von diesem theoremate ist also schon dieser casus bewiesen: Si $2A = 4\square$, tum etiam $A = 4\square$, oder si $2^n A = 4\square$, tum quoque $A = 4\square$. Ich kann aber auch noch einige andere Fälle beweisen, als:

Theorema. Si $3A = 4\square$, erit etiam $A = \boxed{4}$ (Ich habe im vorigen vergessen dieses Zeichen $\boxed{4}$ um summam quatuor quadratorum integrorum anzuzeigen).

Demonstratio. Quia omne quadratum est vel formae $3n$ vel $3n + 1$, so sind entweder alle vier quadrata per 3 divisibilia, oder nur eins. Im ersten Falle wird

$$3A = 9aa + 9bb + 9cc + 9dd,$$

und also $A = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd$, das ist

$$A = (a+b+c)^2 + (a-b+d)^2 + (a-c-d)^2 + (b-c+d)^2.$$

Im andern Fall ist

$$3A = (3a + 1)^2 + (3b + 1)^2 + (3c + 1)^2 + 9dd,$$

und folglich

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 3aa + 3bb + 3cc + 3dd.$$

Dieses aber ist

$$A = (1 + a + b + c)^2 + (a - b + d)^2 + (a - c - d)^2 + (b - c + d)^2;$$

also wiederum $A = \boxed{4}$.

Theor. Si $5A = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Erit enim

vel I. $5A = 25aa + 25bb + 25cc + 25dd$

vel II. $5A = (5a + 1)^2 + (5b + 2)^2 + 25cc + 25dd$

vel III. $5A = (5a + 1)^2 + (5b + 2)^2 + (5c + 1)^2 + (5d + 2)^2$.

Casu I. est $A = 5aa + 5bb + 5cc + 5dd =$

$$(2a + b)^2 + (a - 2b)^2 + (2c + d)^2 + (c - 2d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu II est $A = 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 5cc + 5dd =$

$$(1 + a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (2c + d)^2 + (c - 2d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu III est

$$A = 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 1 + 2c + 4d + 5cc + 5dd =$$

$$(1 + a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (1 + c + 2d)^2 + (2c - d)^2 = \boxed{4}.$$

Hier ist zu bemerken, dass a, b, c, d sowohl numeros affirmativos als negativos bedeuten. Dahero nicht nöthig habe um der Allgemeinheit willen $5a \pm 1$ für $5a + 1$ zu schreiben. Wenn man nun diese theoremata zusammennimmt, so folget daraus dieses:

Si $2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma} A = \boxed{4}$, tum erit quoque $A = \boxed{4}$.

Man kann auch noch weiter gehen, als:

Theor. Si $7A = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Cum omnes quadrati sint vel formae $7m$, vel $7m+1$, vel $7m+2$, vel $7m+4$, erit

vel I. $7A = 49aa + 49bb + 49cc + 49dd$, ergo

$A = 7(aa + bb + cc + dd) = \boxed{4}$, nam $\boxed{4}.\boxed{4} = \boxed{4}$,

vel II. $7A = (1+7a)^2 + (1+7b)^2 + (1+7c)^2 + (2+7d)^2$,

vel III. $7A = (1+7a)^2 + (2+7b)^2 + (3+7c)^2 + 49dd$,

vel IV. $7A = (2+7a)^2 + (2+7b)^2 + (2+7c)^2 + (3+7d)^2$,

vel V. $7A = (1+7a)^2 + (3+7b)^2 + (3+7c)^2 + (3+7d)^2$.

Casu II erit

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd = (1+a+b+c+2d)^2 + (a-b-2c+d)^2 + (a+2b-c-d)^2 + (2a-b+c-d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu III. erit

$$A = 2 + 2a + 4b + 6c + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd = (a-2b+c+d)^2 + (b+2c+d-a+1)^2 + (a+b-c+2d)^2 + (2a+b+c-d+1)^2 = \boxed{4}.$$

etc.

Wenn der numerus A also in vier quadrata könnte resolvirt werden $A = aa + bb + \frac{1}{4}(kk-bb)^2 + dd$, so würde freylich, wie Ew. bemerket, $A + 1 = \boxed{4}$, denn

$$A + 1 = \left(\frac{1}{2}(kk - bb) - 1\right)^2 + kk + aa + dd.$$

Dass im postscripto gemeldte theorema ist sehr artig; denn wenn alle numeri $\boxed{4}$ (welche nicht aus weniger als vier quadratis bestehen) in dieser Form $4^{e-1}(8m+7)$ enthalten wären, so finde ich auch, dass daraus folgte omnem numerum esse $= \boxed{4}$. Mein Beweis davon ist dieser:

Si omnes numeri $\boxed{4}$ in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ continentur, tum omnes numeri in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ non contenti essent $= \boxed{4}$. Foret ergo $8m+1 = \boxed{4}$, item $8m+3 = \boxed{4}$, item $8m+5 = \boxed{4}$. At si $8m+5 = \boxed{4}$ erit quoque $3(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Oder also: Quia

$3(8n+7) = 8m+5$, erit $3(8n+7) = \boxed{4}$,

ideoque etiam $8n+7 = \boxed{4}$.

Hieraus folget ferner, dass wenn man nur beweisen könnte, omnes numeros formae $8m+1$ esse $= \boxed{4}$, tum omnes plane numeros futuros esse $= \boxed{4}$. Cum enim sit $3(8n+3) = 8m+1$, erit $3(8n+3) = \boxed{4}$, ergo et $8n+3 = \boxed{4}$. Porro ob $5(8n+5) = 8m+1$, erit $5(8n+5) = \boxed{4}$, ergo et $8n+5 = \boxed{4}$. Hinc denique erit $8n+7 = \boxed{4}$; ergo omnes numeri impares, ac proinde etiam omnes pares essent $= \boxed{4}$.

Euler.

P. S. Das theorema für $7A = \boxed{4}$, so ich nicht ausgeführt, wird durch folgendes Generaltheorema vollendet:

Theorema. Posito $m = aa + bb + cc + dd$, si sit $mA = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Sit $mA = (f+mp)^2 + (g+mq)^2 + (h+mr)^2 + (k+ms)^2$ atque $ff + gg + hh + kk =$

$$(aa + bb + cc + dd)(xx + yy + zz + vv),$$

erit

$$f = ax + by + cz + dv$$
$$g = bx - ay - dz + cv$$
$$h = cx + dy - az - bv$$
$$k = dx - cy + bz - av$$

fietque $A = xx + yy + zz + vv + 2(fp + gq + hr + ks) + m(pp + qq + rr + ss)$; at reperitur hinc

$$A = (ap + bq + cr + ds + x)^2 + (aq - bp + cs - dr - y)^2 + (ar - bs - cp + dq - z)^2 + (as + br - cq - dp - v)^2$$

ergo $A = \boxed{4}$ in integris. Q. E. D.

Ita si $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$ erit $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $xx + yy + zz + vv = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $v = 0$, unde $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. Ergo si

$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2$ erit

$$A = (2p + q + r + s + 1)^2 + (2q - p + s - r - 1)^2 + (2r - s - p + q - 1)^2 + (2s + r - q - p)^2.$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein Capital von 1000 Rthlrn. in 640 Jahren zu 5 pro cento, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr gross, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiss nicht leicht. Ich habe folgende Summ gefunden: 36404192715744080 Rthlr. 22 Ggr. $11\frac{9}{10}$ Pf., welche nicht um $\frac{1}{10}$ Pf. von der Wahrheit fehlen soll. — Der Aufgeber verlangt, dass man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine ganz Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könnte.

Euler.

LETTRE CXXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. 24. März 1750.

Es sind schon mehr als sieben Monate verflossen, seitdem ich Ew. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn, wenn nicht einestheils unterschiedene Abhaltungen dazwischen gekommen wären, anderntheils aber dasjenige, so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eignen Urtheil von gar zu geringem Werth gewesen wäre. Die Methode, so Ew. gefunden um zu zeigen, dass wenn $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein inventum inventorum, und ob ich zwar geglaubet, dass die propositio: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, auf eine leichtere Art würde können demonstrirt werden, so habe doch dergleichen Demonstration nicht gefunden. Ich