$$\left.\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ A = 1 - x^3 - Bx^5 \\ B = 1 - x^5 - Cx^8 \\ C = 1 - x^7 - Dx^{11} \\ D = 1 - x^9 - Ex^{14} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{oder} \left\{\begin{array}{l} s \quad = 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 = x^2\,(1 - x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 = x^7\,(1 - x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} = x^{15}\,(1 - x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} = x^{26}\,(1 - x^9) - Ex^{40} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

woraus denn ganz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\,(1 - x^3) + x^7\,(1 - x^5) - x^{15}\,(1 - x^7) + x^{26}\,(1 - x^9) - \text{etc.}$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}$$

Euler.

LETTRE CXXXI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorèmes relatifs à la résolution des nombres en trois et quatre quarrés.

St. Petersburg d. 18. Juli 1750.

Die Demonstration von den theorematibus, die summas trium et quatuor quadratorum betreffend, welche Ew. in Dero Schreiben aufführen, habe ich leicht eingesehen, weil generaliter wahr ist, dass posita $z = \frac{2(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{ee + ff + gg + hh}$, die vier gegebenen quadrata $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$ gleich sind $(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2$, allwo die quantitates e, f, g, h pro lubitu genommen werden können, wenn auch über dieses, die letztern vier quantitates so beschaffen sind, dass die summa quatuor radicum

$$(e + f + g + h)\,z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0,$$

so können die vier quadrata allezeit in drey quadrata verwandelt werden.

Ich will noch einige andere propositiones beyfügen, die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst demonstriren:

I. $$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+(2\delta+\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\delta)^2+(\alpha+\gamma+\delta)^2+(\beta+\gamma+\delta)^2+\delta\delta=(\alpha+\delta)^2+(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$$

woraus zugleich die Methode erhellet, wie data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia, verwandelt werden können, denn wenn δ in den gegebenen vier quadratis ein numerus par ist, so gilt die erste Aequation pro quadratis paribus, und die andere pro imparibus.

II. Si dantur in uno casu $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=8m+3$, dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque $2m+pp\pm p+1$; nam si $8m+3$ est $=$ tribus quadratis, erit $8m+3+(1+2p)^2=$ quatuor quadratis et divisis omnibus per 4, $2m+pp\pm p+1=$ quatuor quadratis.

III. Nachfolgende drey quadrata in fractis

$$\frac{(\pm pp\alpha\mp 2qq\beta-2pq\gamma)^2+(\mp 2qq\alpha\pm pp\beta-2pq\gamma)^2+(\mp 2pq\alpha\mp 2pq\beta+(2qq-pp)\gamma)^2}{(pp+2qq)^2}$$

allwo α, β, γ pro integris genommen werden, sind $=$ diesen drey quadratis integris $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$.

IV. Si $AA+BB+CC=8m+3$, erit

$$\frac{(A+B-C\pm 1)^2}{4.4}+\frac{(A-B+C\pm 1)^2}{4.4}+\frac{(-A+B+C\pm 1)^2}{4.4}+\frac{(-A-B-C\pm 1)^2}{4.4}=2m+1.$$

und wenn man 3 anstatt 1 setzet, so kommen vier quadrata $=2m+3$ heraus.

Goldbach.

LETTRE CXXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. August 1750.

Die überschriebenen theoremata circa resolutionem numerorum in tria et quatuor quadrata sind alle merkwürdig und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bisher umsonst bemühet aus solchen theorematibus den geringsten Nutzen für die bewussten Fermatiana zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise: Si numerus integer n fuerit summa quatuor fractorum quadratorum

$$\frac{aa}{pp}+\frac{bb}{qq}+\frac{cc}{rr}+\frac{dd}{ss},$$

tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris. Und ich sehe wohl, dass ich ohne diese