LETTRE CXXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de stéreométrie.

Berlin d. 14. November 1750.

Neulich kam mir in Sinn die allgemeinen Eigenschaften der Cörper, welche hedris planis eingeschlossen sind, zu bestimmen, weil kein Zweifel ist, dass sich in denselben nicht eben dergleichen allgemeine Eigenschaften finden sollten, als in den figuris planis rectilineis, deren Eigenschaften darin bestehen, dass 1. in einer jeglichen figura plana der numerus laterum dem numero angulorum gleich ist, hernach 2. dass die summa angulorum omnium gleich ist bis tot rectis quot sunt latera, demtis quatuor. Wie aber in den figuris planis nur latera und anguli zu betrachten vorkommen, so müssen bei den Cörpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden, als

I. die hedrae, deren Anzahl sey $=H$;

II. die anguli solidi, deren Anzahl sey $=S$;

III. die Fügungen, wo zwey hedrae secundum latera zusammenkommen, so ich aus Mangel eines recipirten Worts, *acies* nenne, deren Anzahl sey $=A$;

IV. die latera singularum hedrarum, quorum omnium simul sumtorum numerus sit $=L$;

V. die anguli plani singularum hedrarum, quorum omnium numerus sit $=P$.

1. Bei diesen fünf Stücken ist nun erstlich klar, dass $P=L$, weil in allen hedris der numerus angulorum $=$ numero laterum.

2. Ist auch immer $A=\frac{1}{2}L$, oder $A=\frac{1}{2}P$, weil immer zwey latera diversarum hedrarum zusammenkommen, um eine aciem zu formiren.

3. Dahero ist der numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium allzeit par.

$$\left.\begin{array}{l}\text{4. Semper est vel } L=3H \text{ vel } L>3H\\ \text{5. Semper est vel } P=3S \text{ vel } P>3S\end{array}\right\}\text{ at est } P=L.$$

Dieses ist klar, weil keine hedra aus weniger als drey Seiten, und kein angulus solidus aus weniger als drey angulis planis bestehen kann. Folgende Proposition aber kann ich nicht recht rigorose demonstriren:

6. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est $H+S=A+2$, seu $H+S=\frac{1}{2}L+2=\frac{1}{2}P+2$.

7. Impossibile est ut sit $A+6>3H$ vel $A+6>3S$.

8. Impossibile est ut sit $H+4>2S$ vel $S+4>2H$.

9. Nullum formari potest solidum, cujus omnes hedrae

sint sex pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.

10. Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in $4A - 4H$.

11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est $= 4S - 8$ rectis.

Exemplo sit (Fig. 39) prisma triangulare, ubi est

1. numerus hedrarum $H = 5$;
2. numerus angulorum solidorum $S = 6$;
3. numerus acierum $(ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef)$ $A = 9$;
4. numerus laterum et angulorum planorum $L = P = 18$. Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde $L = P = 2.3 + 3.4 = 18$. Nun ist nach dem theor. 6to: $H + S(11) = A + 2(11)$. Ferner summa omnium angulorum planorum (aus den beiden triangulis $= 4$ rectis, aus den drey quadrilateris $= 12$ rectis) erit $= 16$ rectis $= 4(A - H)$ $= 4S - 8$ rectis.

Es nimmt mich Wunder, dass diese allgemeinen proprietates in der Stereometrie noch von Niemand, so viel mir bekannt, sind angemerkt worden; doch viel mehr aber, dass die fürnehmsten davon als theor. 6 et theor. 11 so schwer zu beweisen sind, denn ich kann dieselben noch nicht so beweisen, dass ich damit zufrieden bin.

Um die soliditatem eines Cörpers zu bestimmen, so wollte ich nach Belieben inners desselben ein Punct annehmen, und daraus nach allen angulis solidis grade Linien ziehen. Hierdurch wird der Cörper in lauter Pyramiden zertheilt,

deren vertices im angenommenen Punct sind und die hedras zu basibus haben. Welche Pyramiden nicht triangulares sind, können ferner leicht in triangulares zerschnitten werden. Alles kommt also darauf an, dass man die soliditatem pyramidis triangularis bestimmen könne, welches also ex cognitis lateribus geschehen kann:

Sit (Fig. 40) $ABCD$ pyramis proposita, in qua habeantur $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$, erit hujus pyramidis soliditas $=$

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{r} +aaff(bb+cc+dd+ee-aa-ff) - aabbcc \\ +bbee(aa+cc+dd+ff-bb-ee) - aaddee \\ +ccdd(aa+bb+ee+ff-cc-dd) - bbddff \\ -cceeff \end{array}\right\}}$$

Euler.