LETTRE CXXXVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques précédentes.

St. Petersburg d. 17. Juli 1751.

Von der aequatione

$$3^2+5^2+u^2+8=uu+42=\text{tribus quadratis}$$

will ich nur bemerken, dass u infinities infinitis modis determiniret werden kann, davon ein casus ist

$$3^2+5^2+(4pp-10p+7)^2+8=$$
$$(4pp-10p+3)^2+(4p-9)^2+(4p-1)^2;$$

was ich aber in meinem vorigen Schreiben von dem valore δ per α, β, γ et q expresso erwähnet habe, verstehe ich jetzo selbst nicht mehr und zweifle an dessen Richtigkeit, doch ist dieses gewiss, dass

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\varepsilon\varepsilon+8=3^2+(1-\alpha+\beta)^2+$$
$$(1-\alpha+\gamma)^2+\frac{(2\varepsilon q+\alpha-1)^2}{qq},$$

si q determinetur per hanc aequationem

$$\frac{(3qq+1)}{2q}(1-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\,q=2\varepsilon.$$

Goldbach.

LETTRE CXXXIX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d 3. August 1751.

Ew. sage ich schuldigsten Dank vor die Communication der vielen casuum pro

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8=aa+bb+cc+dd.$$

Es ist allerdings wahr, wie Ew. vermuthet, dass ich ausser Deroselben Niemand habe, mit dem ich von dergleichen découvertes schriftlich oder mündlich conferiren könnte. Ich glaube, man kann die Sache etwas kürzer fassen, wenn man nur drey quantitates indeterminatas annimmt und

$$\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8=bb+cc+dd$$

setzet, denn es ist gewiss, dass wenn b in einem casu bekannt ist, selbiges auch in infinitis aliis angegeben werden kann, wie ich in meinem letztern Schreiben angezeiget habe, (woselbst aber unnöthig $2p$ anstatt p gesetzt worden), indem es leicht zu demonstriren ist, dass alsdann auch seyn wird $\beta\beta+\gamma\gamma+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2$, si ponatur $u=(\delta-b)p-(c+d)$. Ich weiss gar wohl, dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen formulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhie $\delta+pu=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, so entstehet daraus diese aequatio infinities generalior

$$\beta\beta+\gamma\gamma+(\Delta+PU)^2+8=$$
$$(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2,$$

wenn P numerum integrum quemcunque bedeutet und

$$U=(\Delta-B)P-(C+D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n+4$ allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=2$, aber nicht allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=0$, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa quatuor quadratorum, quorum summa radicum est $=0$, in tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque quadrata, quorum summa radicum $=0$, allezeit in quatuor quadrata die man angeben kann, resolviret werden könne, weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele casus, da solches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht $=0$ ist, also ist z. Ex.

$$((2+pp)b-c-d-e)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+$$
$$(e-2b)^2+4ppbb=$$

his quatuor $((4+pp)b-c-d-e)^2+cc+dd+ee$.

Goldbach.

LETTRE CXL.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Recherche sur le nombre des manières dont un polygone peut être partagé en triangles par des diagonales.

Berlin d. 4. September 1751.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Untersuchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass eine summa quatuor quadratorum $aa+bb+cc+dd$, quorum summa radicum $a+b+c+d=0$, allzeit in drey quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd=aa+bb+cc+(a+b+c)^2=$$
$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2.$$