es leicht zu demonstriren ist, dass alsdann auch seyn wird $\beta\beta+\gamma\gamma+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2$, si ponatur $u=(\delta-b)p-(c+d)$. Ich weiss gar wohl, dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen formulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhie $\delta+pu=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, so entstehet daraus diese aequatio infinities generalior

$$\beta\beta+\gamma\gamma+(\Delta+PU)^2+8=$$
$$(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2,$$

wenn P numerum integrum quemcunque bedeutet und

$$U=(\Delta-B)P-(C+D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n+4$ allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=2$, aber nicht allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=0$, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa quatuor quadratorum, quorum summa radicum est $=0$, in tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque quadrata, quorum summa radicum $=0$, allezeit in quatuor quadrata die man angeben kann, resolviret werden könne, weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele casus, da solches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht $=0$ ist, also ist z. Ex.

$$((2+pp)b-c-d-e)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+$$
$$(e-2b)^2+4ppbb=$$

his quatuor $((4+pp)b-c-d-e)^2+cc+dd+ee$.

Goldbach.

LETTRE CXL.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Recherche sur le nombre des manières dont un polygone peut être partagé en triangles par des diagonales.

Berlin d. 4. September 1751.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Untersuchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass eine summa quatuor quadratorum $aa+bb+cc+dd$, quorum summa radicum $a+b+c+d=0$, allzeit in drey quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd=aa+bb+cc+(a+b+c)^2=$$
$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2.$$

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa+bb+cc+dd+ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könne, so oft die summa radicum $a+b+c+d+e=0$. Allein aus dem Vorigen erhellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengenommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzuzeigen, davon nicht vier zusammengenommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa+bb+cc+dd+ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, d = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$b \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$

wo das Zeichen .. statt $\pm$ gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formuln nur eine enthalten ist, die $=0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa+bb+cc+dd+ee$$

sich in summam quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa+bb+cc+dd=\square+\square+\square,$$

wenn $a+b+c+d=0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa+bb+cc+dd$ so beschaffen, dass $a+b+c+d=2$, so ist
$aa+bb+cc+dd=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2+1$;
folglich ist $aa+bb+cc+dd-1$ in drey quadrata resolubel. Da nun $8n+3$ in drey quadrata resolubel, wenn man setzt

$$8n+3=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2,$$

so wird $8n+4=aa+bb+cc+dd$ dergestalt, dass

$$a+b+c+d=2;$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula zerschnitten werden könne.

Also ein quadrilaterum $abcd$ kann entweder durch die diagonalem ac, oder durch bd, und also auf zweyerley Art in zwey triangula resolvirt werden.

Ein Fünfeck $abcde$ wird durch zwey diagonales in drey triangula getheilet, und solches kann auf fünferley verschiedene Arten geschehen, nehmlich durch die diagonales I. ac, ad. II. bd, be. III. ca, ce. IV. db, da, V. ec, eb.

Ferner wird ein Sechseck durch drey diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n-3$ diagonales in $n-2$ triangula zerschnitten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430.$

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2.6.10.14.18.22\ldots.(4n-10)}{2.3.4.5.6.7\ldots.(n-1)}$$

oder es ist $1 = \frac{2}{2}$, $2 = 1.\frac{6}{3}$, $5 = 2.\frac{10}{4}$, $14 = 5.\frac{14}{5}$, $42 = 14.\frac{18}{6}$, $132 = 42.\frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques.

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5aa + 14a^3 + \text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A \ldots 1 + ba + caa + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coëfficientes bereits exprimiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass