ten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

so ist $x = 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430$.

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2.6.10.14.18.22\ldots.(4n-10)}{2.3.4.5.6.7\ldots.(n-1)}$$

oder es ist $1 = \frac{2}{2}$, $2 = 1.\frac{6}{3}$, $5 = 2.\frac{10}{4}$, $14 = 5.\frac{14}{5}$, $42 = 14.\frac{18}{6}$, $132 = 42.\frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Suite des recherches numériques.

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5aa + 14a^3 + \text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A\ldots 1 + ba + caa + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coëfficientes bereits exprimiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

$$B\ldots 1+a+baa+ca^3+da^4+\text{etc.}$$

in se multiplicata $=A$ seyn muss, so wird

$$BB=\left\{\begin{array}{llllll} 1 & +\,a & +\,baa & +\,ca^3 & +\,da^4 & \ldots \\ & \,a & +\,aa & +\,ba^3 & +\,ca^4 & \ldots \\ & & \,baa & +\,ba^3 & +\,bba^4 & \ldots \\ & & & \,ca^3 & +\,ca^4 & \ldots \\ & & & & \,da^4 & \ldots \end{array}\right.$$

$$=A\ldots 1+2a+5aa+14a^3+42a^4\ldots$$

nehmlich $b=2$, $c=5$, $d=14$ etc. 2. Wenn in der serie A gesetzt wird $a=\alpha-\alpha\alpha$, so wird die summa seriei $=\frac{1}{(-a)^2}=E\ldots 1+2\alpha+3\alpha\alpha+4\alpha^3+$ etc. und die series A verwandelt sich in

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ & +\,b\alpha-b\alpha\alpha & & & & \\ & & +\,c\alpha\alpha & \div\,2c\alpha^3 & +\,c\alpha^4 & \\ & & & +\,d\alpha^3 & \div\,3d\alpha^4 & \ldots \\ & & & & +\,e\alpha^4 & \ldots \\ =E\ldots 1 & +\,2\alpha & +\,3\alpha\alpha & +\,4\alpha^3 & +\,5\alpha^4 & \ldots \end{array}$$

Comparatis singulis terminis seriei A transmutatae cum singulis seriei E, fit $b=2$, $c=5$, $d=14$, etc.

Ich hatte in meinem Brief vom 15. Juni unter andern auch des casus Erwähnung gethan, wenn in der aequatione $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8=$ quatuor quadratis, $\delta=\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$ numero integro. Selbigen casum haben Ew. in Dero Antwort mit Stillschweigen übergangen; es sind aber die quatuor quadrata invenienda in solchem Falle

$$\frac{(2\alpha+2\beta-\gamma+6)^2}{3^2}+\frac{(2\alpha+2\beta-\gamma-6)^2}{3^2}+\frac{(-\alpha+2\beta+2\gamma)^2}{3^2}+\frac{(2\alpha-\beta+2\gamma)^2}{3^2}$$

und der valor δ kann noch generaler angenommen werden, wen man setzet $\delta=\frac{\alpha-2qq\beta-2q\gamma}{1+2qq}=$ numero integro, und zugleich $\varepsilon=\frac{-2q\alpha-2q\beta+(2qq-1)\gamma}{1+2qq}=$ numero integro, quibus positis erunt

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8=(\delta+2)^2+(\delta-2)^2+(\delta-\alpha+\beta)^2+\varepsilon\varepsilon.$$

Hinc sequitur pro quocunque casu $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8$ assignari posse quatuor quadrata integra si

$$\gamma\gamma+2(\beta+\delta)(\alpha-\delta)$$

sit numerus quadratus, ubi α, β, etc. sunt numeri permutabiles sive affirmativi sive negativi.

Imgleichen positis tribus quadratis imparibus

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=8n+3 \text{ et } \delta=(uu-u-4n-1),$$

ubi u sit numerus quicunque integer, erunt

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+4\delta\delta+8=(\delta+2)^2+(\delta-2)^2+(\delta-u)^2+(\delta+u-1)^2.$$

Unter die problemata, zu deren Solution es an einer sichern Methode fehlet, rechne ich auch dieses: Determinare numerum e per f et constantes hac lege, ut $2ee-ff+2$ fiat quadratum. *Solutio*: ponatur $e=13^2f\pm 239$.

Goldbach.