$$\begin{aligned}
e &= f \pm 1 \\
e &= 5f \pm 7 \\
e &= 29f \pm 41 \\
e &= 169f \pm 239 \\
e &= 985f \pm 1393 \\
e &= 5741f \pm 8119
\end{aligned}$$

etc.

Die lex progressionis ist diese, dass wenn zwey dergleichen formulae se immediate insequentes sind

$$e = Mf \pm m$$
$$e = Nf \pm n$$

die folgende seyn muss

$$e = (6N - M)f \pm (6n - m).$$

Inzwischen kann man doch alle diese Formuln durch eine einige Generalformul ausdrücken: Sit q numerus impar quicunque, dico fore

$$e = \frac{(\sqrt{2}+1)^q + (\sqrt{2}-1)^q}{2\sqrt{2}} f \pm \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^q - (\sqrt{2}-1)^q}{2}\right)$$

und es ist auch gewiss, dass alle Fälle, in welchen e durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, in diesen Formuln enthalten sind. Gleichergestalt, wenn

$$(bb \pm 1)\, ee \mp 4aaff \pm 4cc\,(bb \pm 1)$$

ein Quadrat seyn soll, so ist:

$$e = \frac{(\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q + (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q}{\sqrt{(bb \pm 1)}} \cdot af \pm$$
$$\left((\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q - (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q\right) c;$$

also in diesem Fall $3ee + ff - 3 =$ quadrato, wird

$$e = \frac{(\sqrt{3}+2)^q + (\sqrt{3}-2)^q}{2\sqrt{3}} f \pm \frac{((\sqrt{3}+2)^q - (\sqrt{3}-2)^q)}{2}.$$

Euler.

LETTRE CXLIII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet. Question de syntaxe de la langue française.

St. Petersburg d. 9. Mai 1752.

Ew. Dissertation de summis divisorum, welche Sie an die hiesige Akad. der Wiss. übersandt haben, ist mir von dem Hrn. Prof. Grischow communiciret worden. Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon pro dignitate zu urtheilen, allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen, lässet mich an der Richtigkeit alles dessen, was in bemeldter Dissertation enthalten ist, nicht zweifeln. Insonderheit habe ich mit Vergnügen gesehen, dass in den numeris 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, etc. eine so schöne Ordnung von Ew. bemerkt worden, und glaube gänzlich, dass es series gibt, aus deren mehr als hundert terminis consequentibus die lex progressionis, ob sie gleich an sich selbst kurz und leicht ist, dennoch nicht zu ersehen seyn wird, als z. Ex. sit series

$$\alpha \ldots \overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \text{etc.}$$

cujus progressio haec est, ut dato termino quocunque A et exponente termini n, fiat $A \pm \sqrt{(2.3^n - 2AA)} =$ termino proxime sequenti B, sumendo signum $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3, ex quo sequitur seriem α habere sororem

$$\beta \ldots \overset{1}{1},\ \overset{2}{2},\ \overset{3}{1},\ \overset{4}{4},\ \overset{5}{11},\ \overset{6}{10},\ \overset{7}{13},\ \text{etc.}$$

ita comparatam, ut duplum quadrati termini, cujus exponens est n in serie β, additum ad quadratum termini, cujus exponens est idem n in serie α, det 3^n, unde simul apparet legem progressionis seriei β esse $A \pm \sqrt{(3^n - 2AA)} = B$, sumendo $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3.

Sit ex. gr. $n = 4$, erit terminus huic exponenti respondens in serie α, 7, quadratum ejus 49, et duplum quadrati termini huic exponenti respondentis in serie β erit 2.4^2 ergo $7^2 + 2.4^2 = 3^4 = 81$.

Similiter quadratum termini, cujus exponens est 5 in serie α, est 1^2, duplum quadrati termini respondentis exponenti 5 in serie β, est $= 2.11^2$, ergo $1 + 2.11^2 = 3^5 = 243$ et ita porro. Hinc patet solutio problematis: Dividere numerum 3^{n+1} in tria quadrata, quorum nonnisi duo sint aequalia.

Ich habe auch observiret, dass $\square + \square + \square = \frac{\square + 2\square + 3\square}{6}$, oder dass in der Aequation

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6}$$

datis a, b, c, integris, die numeri p, q, r allezeit per integros exprimiret werden können.

Goldbach.

P. S. Dass ein jeder numerus $(2mm+1)^n$ in drey quadrata, quorum duo sunt aequalia, resolviret werden kann,

ist gar leicht auf folgende Art zu demonstriren: Sit

$$(2mm + 1)^n = pp + 2mmqq,$$

erit

$$(2mm+1)^{n+1} = (p \pm 2mmq)^2 + 2mm(p \mp q)^2;$$

nun aber ist die propositio antecedens wahr in casu $n = 1$ (denn es wird $p = q = 1$), also ist auch die propositio consequens wahr, weil auf gleiche Art aus jedem casu der proxime sequens demonstriret werden kann.

(Feuillet annexé).

Der P. Bouhours saget an einem Orte: Comme ces messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture du Nouveau Testament.

Hierüber hat ein gewisser Autor nachfolgende critique gemacht: „Je ne *devrois*“ est là une faute de temps, il falloit avoir mis: „que je lisois ce que je ne *devois* point lire,“ autrement il faudra supposer que cet auteur lit encore les livres qu'on lui a reproché de lire.

Ich möchte gern wissen, ob diese critique, die sehr subtile ist, von M. Achard oder von M. Formey vor richtig erkannt wird, im Fall Ew. Gelegenheit hätten sich darüber zu informiren.