LETTRE CXLIV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Question de syntaxe de la lettre précédente. Intégrations et théorème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 30. Mai 1752.

Die series

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \text{etc.},$$

von welcher Ew. diese schöne Eigenschaft angemerket, dass $B = A \pm \sqrt{(2.3^n - 2A^2)}$, ist dem ersten Anblick nach so irregulär, dass sie nach keinem gewissen Gesetz fortzugehen scheinet. Weil aber die bemerkte Eigenschaft Statt findet, die termini mögen affirmative genommen werden oder negative, so kann man denselben solche signa vorsetzen, dass eine sehr regelmässige series herauskomme, nehmlich:

$$-\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{5}+\overset{4}{7}-\overset{5}{1}-\overset{6}{23}-\overset{7}{43}-\overset{8}{17}+\overset{9}{215}\,\text{etc.}+\overset{n}{P}+\overset{n+1}{Q}+\overset{n+2}{R}$$

als welche recurrens ist von der Eigenschaft, dass $R = 2Q - 3P$.

Folglich ist kraft der Natur dieser serierum

$$P = \frac{-(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2}$$

und

$$Q = \frac{-(1+\sqrt{-2})^{n+1} - (1-\sqrt{-2})^{n+1}}{2}.$$

folglich $2.3^n = Q^2 - 2PQ + 3P^2$ und also

$$Q = P + \sqrt{(2.3^n - 2P^2)}.$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der andern serie sorore, welche mit den gehörigen signis diese Form bekommt

$$+\overset{1}{1}+\overset{2}{2}+\overset{3}{1}-\overset{4}{4}-\overset{5}{11}-\overset{6}{10}+\overset{7}{13}\ \text{etc.}\ \overset{n}{p}+\overset{n+1}{q}+\overset{n+2}{r},$$

da auch $r = 2q - 3p$, und also

$$p = \frac{(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2\sqrt{-2}} \text{ und } q = p + \sqrt{(3^n - 2pp)}.$$

Was aber die schöne Vewandtschaft dieser beyden serierum anlangt, so habe ich überhaupt gefunden, wenn man zwey solche series hat

$$\alpha \ldots \overset{(0)}{1},\ \overset{(1)}{a},\ \overset{(2)}{aa-b},\ \overset{(3)}{a^3-3ab},\ \overset{(4)}{a^4-6aab+bb},$$

$$\ldots \overset{(n)}{\frac{(a+\sqrt{-b})^n+(a-\sqrt{-b})^n}{2}} = X$$

$$\beta \ldots \overset{(0)}{0},\ \overset{(1)}{1},\ \overset{(2)}{2a},\ \overset{(3)}{3aa-b},\ \overset{(4)}{4a^3-4ab},$$

$$\ldots \overset{(n)}{\frac{(a+\sqrt{-b})^n-(a-\sqrt{-b})^n}{2\sqrt{-b}}} = Y$$

welche beyde recurrentes sind von der Natur, dass

$$C = 2aB - (aa+b)A,$$

wenn nehmlich A, B, C tres termini successivi sind, so ist immer $XX + bYY = (aa+b)^n$. Setzt man nun $a = 1$, $b = 2$, so kommen Ew. beyde series heraus.

Dero Anmerkung, dass allezeit

$$aa + bb + cc = \frac{pp + 2qq + 3rr}{6},$$

beruhet auf diesem Grund, dass $p=2a+b-c$, $q=a-b+c$, und $r=b+c$. Dieselbe hat mir aber Anlass gegeben zu suchen, in welchen Fällen es möglich sey, dass

$$aa+bb+cc=fpp+gqq+hrr.$$

Zu diesem Ende setze ich

$$p=\alpha a+\beta b+\gamma c,\ q=\delta a+\varepsilon b+\zeta c,\ r=\eta a+\vartheta b+\iota c,$$

und da muss folgenden sechs Aequationen ein Genüge geleistet werden:

$$f\alpha\alpha+g\delta\delta+h\eta\eta=1;\ f\beta\beta+g\varepsilon\varepsilon+h\vartheta\vartheta=1;$$
$$f\alpha\beta+g\delta\varepsilon+h\eta\vartheta=0;\ f\alpha\gamma+g\delta\zeta+h\eta\iota=0;$$
$$f\gamma\gamma+g\zeta\zeta+h\iota\iota=1;$$
$$f\beta\gamma+g\varepsilon\zeta+h\vartheta\iota=0;$$

deren Resolution nicht wenig Mühe kostet. Ich habe dieselbe folgendergestalt herausgebracht: Für β, γ, ε, ζ kann man annehmen, was man will, und ausser denselben noch nach Belieben die Zahlen m und n, so wird

$$\alpha=\frac{n}{m}(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);\ \delta=-\frac{m}{n};\ \eta=mn(\gamma\varepsilon-\beta\zeta);$$
$$\vartheta=mm\gamma+nn\zeta(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);\ \iota=-mm\beta-nn\varepsilon(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);$$

und ferner $f=\frac{mm}{mm(\beta\beta+\gamma\gamma)+nn(\beta\varepsilon+\gamma\zeta)^2}$; $g=\frac{nn}{mm+nn(\varepsilon\varepsilon+\zeta\zeta)}$ und $h=\frac{fg}{mmnn}$. Also ist $aa+bb+cc=\frac{3pp+14qq+rr}{42}$ wenn

$$p=3a+2b-c$$
$$q=a-b+c$$
$$r=-a+4b+5c.$$

Dergleichen theoremata können also unendlich viel aus diesen Generalformuln herausgebracht werden.

Wegen der überschriebenen passage des P. Bouhours habe ich erstlich den Hrn. De Maupertuis als un des quarante de l'Académie française befraget, welcher, nachdem er dieselbe nebst der critique etlichemal überlesen, gesagt,

dass er ohne einiges Bedenken sich sowohl des *devrois* als des *devois* bedienen würde, und fügte hinzu: „il est plaisant qu'on a critiqué le Père Bouhours sur ce mot."

M. Achard lässt Ew. wegen des in ihn gesetzten guten Zutrauens sein gehorsamstes Compliment vermelden, und nachdem er die Sache wohl erwogen, so vermeint er, dass *devrois* besser sey; doch will er das *devois* nicht verwerfen.

Ich habe darüber auch den Hrn. Beguelin, Hofmeister bey dem Prinz Friedrich von Preussen, welcher für ungemein stark in der französischen Sprache gehalten wird, befraget, und dieser approbirt die critique vollkommen.

M. de Maupertuis hatte wohl noch diesen Einfall, dass man untersuchen müsste, ob man auf Latein sagen soll „quos legere non debebam" oder „non deberem", und die Decision im Lateinischen, welche weder er noch ich zu geben uns getraueten, würde auch im Französischen gelten. Hieraus werden also Ew. selbst die Sache am besten decidiren.

Mir kommt des Hrn. Beguelin's Entscheidung deswegen am gründlichsten vor, weil er die Reguln der französischen Sprache mit allem Fleiss studirt hat, welche M. de Maupertuis und Achard nur ex usu wissen, und beyde sagen mir, dass sie oft der Sache einen andern tour geben müssen, weil sie in Zweifel stehen, ob gewisse Expressionen, die sie brauchen wollten, recht sind oder nicht.

Neulich bin ich auf curieuse Integrationen verfallen. Denn gleich wie von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ das integrale ist $yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-cc)}$, also ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ das integrale:

$$yy+xx=cc+2xy\sqrt{(1-c^4)}-ccxxyy.$$

Ferner ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$ das integrale:

$$xx+yy+ccxxyy=4c-4cc(x+y)+2xy-2cxy(x+y).$$

Aus solchen Formuln habe ich folgendes theorema hergeleitet (Fig. 41):

In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens VMT, alteri axi CB occurrens in T, eaque capiatur $TV=CA$, et ex V ipsi CB agatur parallela VN; itemque ex centro C in tangentem perpendiculum CP, dico fore differentiam arcuum BM et AN rectificabilem, scilicet $BM-AN=MP$.

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den Saturnum gesetzten Preis, welcher doppelt war, nemlich von 5000 ℔. allein erhalten.

Euler.

LETTRE CXLV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Développement ultérieur du théorème de géométrie précédent. Opinion de Formey sur la question de syntaxe.

Berlin d. 3. Juni 1752.

Seit dem vorigen Posttag hat mir auch M. Formey seine Meynung über die gemeldte Stelle des P. Bouhours zugeschickt, welche also Ew. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.

Die Eigenschaft der ellipsis, dass darin zwey arcus, deren differentia rectificabilis ist, können angegeben werden, scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bisher die arcus elliptici auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können. Seitdem habe ich aber angemerkt, dass wenn man das problema umgekehrt vorträgt und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die Solution durch die gewöhnlichen Methoden gefunden werden kann.