LETTRE CXLVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 5. August 1752.

Ich erinnere mich noch ganz wohl von Ew. gehört zu haben, dass alle mögliche Zahlen durch die seriem

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \text{etc.}$$

ausgedrückt werden können, wofern nur statt der Puncte die gehörigen Zeichen $+$ oder $-$ gesetzt werden. Ew. hatten mir auch einige solche series eröffnet, und wo ich nicht irre, so befand sich darunter auch die letzt überschriebene

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

Da nun jene series $= \frac{\pi}{4}$, wenn π die peripheriam circuli,

dessen diameter $= 1$, andeutet, so ist

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

welche seriem ich auch in meiner Introductione in Analysin pag. 244 angebracht. Daselbst befinden sich noch viel andere series von dieser Art, als

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \text{etc.}$$

ubi binarius habet signum $-$, numeri primi formae $4n-1$ signum $-$, et numeri primi formae $4n+1$ signum $+$; numeris autem compositis id signum convenit, quod iis ratione multiplicationis ex primis competit, also $\frac{1}{60}$ ob $2 . 2 . 3 . 5$ hat das Zeichen $- . - . - . + = -$. Ferner ist

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi formae $4n-1$ signum $+$, et numeri primi formae $4n+1$ signum $-$. Ferner ist

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$
$$+ \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi $4n-1$ signum $+$, numeri primi $4n+1$, excepto quinario, signum $-$. Alle dergleichen series folgen aus diesen beiden Formuln, wo die factores nach den numeris primis fortgehen:

$$\text{I. } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13}) \text{ etc.}}$$

$$\text{II. } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ etc.}}$$

als aus welchen unendlich viel andere hergeleitet werden können.

Als multiplicetur prima per $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$, erit

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$

et resolutione in seriem facta

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\text{ etc.}$$

ubi 2 habet signum $+$, numeri primi formae $4n-1$, excepto ternario, signum $-$, numeri primi $4n+1$ signum $+$. Hernach, da $0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ etc.}}$, können auch unendlich viel series $=0$ gemacht werden, als $0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$ etc. ubi omnes numeri primi habent signum $-$.

Noch mehr, als in meinem Briefe befindlich, können auch noch aus den daselbst gegebenen Formuln gefunden werden, als da $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$, ubi numeri primi $6n-1$ habent $+$, numeri primi $6n+1$ sign. $-$. Multiplicetur per $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ erit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$

und also

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$
$$+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\text{ etc.}$$

ubi 2 habet $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; et $6n+1$, $+$.

Vermittelst dieser Methode aber kann ich keine andere series von dieser Art herausbringen, als deren summae entweder $=0$, oder a quadratura circuli pendent.

Von den integralibus aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ kann ich keine andere angeben, als die Fälle $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=6$. Wenn ich diesen letzten Fall Ew. zu berichten vergessen habe, so ist von dieser aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^6)}}$ die aequatio integralis

$$x^4+y^4-4cx^4y^4+4ccxxyy(xx+yy)-2xxyy+$$
$$2c(xx+yy)+cc=0,$$

wo c die constantem andeutet, so durch die Integration dazugekommen, und nach Belieben angenommen werden kann, so dass dieses integrale completum ist.

Die Integration dieser Aequation $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ fällt auch nicht sogleich in die Augen, wie Ew. scheinen zu sagen; allein, da ein jedes Glied für sich integrabel ist per logarithmos, so kann davon eine aequatio integralis algebraica gegeben werden, welcher Umstand sich bey obigen Formuln nicht befindet, da weder $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$ ullo modo sive per circulum, sive logarithmos integrirt werden kann; dahero um so viel merkwürdiger ist, dass doch für jene aequationes differentiales, aequationes integrales algebraicae angegeben werden können. Für Ew. Formuln aber, wenn ich setze $\sqrt{(1-x^n)}=v$, so wird $x^n=1-vv$ und $\frac{ndx}{x}=\frac{-2vdv}{1-vv}$, also $\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}}=-\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-vv}$, und integrando

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}}=-\frac{1}{n}l\frac{1+v}{1-v}=-\frac{1}{n}l\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Ebenfalls ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1-y^p)}}=\frac{-1}{p}l\cdot\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}+\text{Const.}$$

folglich

$$\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}} = C\left(\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

welches die integratio completa ist von dieser aequatione differentiali $\frac{x^{-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$.

Es ist noch sehr zweifelhaft, ob ich von meiner pièce über den Saturnum aus Paris exemplaria bekommen werde; denn bisher habe ich keine erhalten, und es ist so schwer dergleichen Sachen von Paris zu bekommen, dass auch ein Buch, so M. Bouguer mir zum Präsent geschickt, unter Wegs verloren gegangen. Sollte ich aber bekommen können, so werde nicht ermangeln damit Ew. aufzuwarten.

Als ich letztens bey M. de Maupertuis speisete, so habe ich die von Ew. angeführten Passagen auf die Bahn gebracht. Die Meinung fiel dahin aus, dass grammaticaliter sowohl das Praesens als Imperfectum recht sey, allein der Sinn sey unterschieden. Also sey es recht: „On a décidé d'une voix qu'il faut dire ...“ weil man nicht nur so hätte sagen sollen, sondern auch immer so sagen soll. Stünde aber „qu'il falloit dire“, so würde solches nicht mehr anzeigen, als dass man bey dem vorgelegten Fall allein so hätte reden sollen, und würde also nicht als ein beständiges Gesetz angesehen werden können.

Was Ew. wegen der von M. de Maupertuis gegebenen Formuln über die leges motus zu fragen belieben, wird ohne Zweifel diejenigen antreffen, wodurch er die regulas communicationis motus in conflictu corporum tam elasticorum quam non elasticorum bestimmt; weil dieselben mit den schon längst bekannten vollkommen einerley sind, so kommen sie auch mit den Leibnizianis überein. Was aber das principium selbst anlanget, woraus der H. v. Maupertuis diese regulas hergeleitet, solches ist allerdings vollkommen

neu. Denn ungeachtet man schon vorlängst behauptet, dass die Natur via facillima würke, so hat doch weder Leibniz noch Jemand anders gezeigt, welches eigentlich diejenige Quantität sey, welche in den operationibus naturae ein minimum ist. M. de Maupertuis nennet diese Quantität die quantitatem actionis, und bestimmt dieselbe durch das Product aus der massa, der Geschwindigkeit und dem spatio, und leitet daraus nicht nur die regulas motus, sondern andere Sachen gar schön her. Ich hatte auch schon längst gewiesen, dass in motibus corporum coelestium immer die Formul $\int Mv\,ds$ ein minimum sey, wo M die massam, v die celeritatem und ds das spatiolum percursum andeutet. Also ist $Mv\,ds$ die quantitas actionis elementaris und $\int Mv\,ds$ die totalis, welche folglich nach M. de Maupertuis ein minimum seyn muss.

Euler.