# LETTRE CXLVIII.

═

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Winsheim et le P. Mersenne sur les nombres parfaits.

St. Petersburg d. 7. October 1752.

Meine Demonstration, dass $\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+$ etc. $=$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{etc.}$$

ist ein casus particularis von dieser propositione generali

$$A\ldots\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{d}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{e}+\text{etc.}=$$

$$B\ldots\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+\frac{2}{e}-\text{etc.}$$

sunt enim seriei $A$ termini impares $=\frac{B}{2}$, et ejusdem seriei $A$ termini pares et termini impares simul sumti nempe $\frac{B+A}{2}=A$, ergo $A=B$. Es sind zwar allhie in der serie $B$ die signa $+$ et $-$ alternantia angenommen worden, es können aber auch, wenn nur die summa ipsius $B$ finita ist, alle termini affirmativi oder quacunque lege variantes angenommen werden; wenn man also die Condition, dass in der serie $A$ die termini continuo decresciren sollen (non attenta variatione signorum $+$ et $-$) bey Seite setzet, so kann eine jede series $B$ in $A$ verwandelt werden; hingegen sehe ich nicht, wie eine einzige von denen, welche Ew. gefunden haben, hieraus deduciret werden könne; dass aber alle solche series entweder $=0$ sind, oder von der quadratura circuli dependiren, halte ich vor eine merkwürdige Observation.





Was Ew. von den casibus integrabilibus aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$$

melden, wird ohne Zweifel nur von denen zu verstehen seyn, wo $n$ ein numerus integer ist, denn dass jede aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^{\frac{1}{m+1}}\right)}}=\frac{a\,dy}{\sqrt{\left(1-y^{\frac{1}{m+1}}\right)}},$$

posito $m$ numero integro affirmativo, integrabilis sey, scheinet mir ganz gewiss zu seyn. In denen von Ew. angegebenen casibus aber, wo $n=2$, vel 3, vel 4, vel 6, finde ich, dass zwar die valores von $y$ etwas verworren aussehen, wenn man die constantem generatim durch $c$ exprimiret, weil sich alsdann allezeit quantitates irrationales mit einmischen; setzet man aber $c=-1$, so wird

pro casu $n=2$, $yy=1-xx$; pro casu $n=3$, $yy=\frac{(xx+x-2)^2}{(1-x)^4}$

$n=4$, $yy=\frac{1-xx}{1+xx}$; $\qquad n=6$, $yy=\frac{-2x^4+xx+1}{(1+2xx)^2}$

woraus man siehet, dass alle diese casus in der formula

$$\frac{ax^4+bx^3+cxx+ex+f}{1+px+qxx+rx^3+sx^4}$$

begriffen sind; so dass, wenn Jemand noch mehrere casus suchen wollte, derselbe sehr wohl thun würde, wenn er gleich anfangs die constantem $c=-1$ setzete.

Hiebey liegt ein Zettel von Dero eignen Hand, worauf Sie schon vor vielen Jahren aus der aequatione $xx+yy-1=0$, diese $xx-1=2cy+cc$ deduciret; ich zweifle aber, ob $xdx+ydy=dy\sqrt{(xx+yy-1)}$ gesetzt werden könne, wenn gleich beydes ex hypothesi $=0$ ist; denn sonst würde auch folgen, dass positis $X$ et $Y$ pro functionibus quibuscunque ipsarum $x$ et $y$, $xdx+ydy=XYdy\sqrt{(xx+yy-1)}$ seyn könnte.

Als ich vor wenigen Tagen einige tomos Commentariorum tam antiquorum quam novorum von der Akad. der Wiss. zum Präsent bekam, hat sich mir, sobald ich den tomum II der letztern eröffnet, des Hrn. Winsheim's Dissertatio de numeris perfectis praesentiret, woselbst er p. 77 die von Ew. angegebenen numeros perfectos, absonderlich aber den neunten, cum salutari clausula „donec contrarium fuerit probatum“ annimmt; ich zweifle aber, ob Ew. das schöne excerptum, so er aus dem Mersenno anführet, schon gelesen haben, welches meines Erachtens sehr lesenswürdig ist. Ob die cogitata Mersenni oder des Leuneschlos paradoxa eher bekannt gemacht worden, ist mir zwar unbekannt, ich sehe aber, dass sie beyde sich in Betrachtung der noch rückständigen 10 oder 11 numerorum perfectorum, einer gleich lautenden Expression bedienet. „Qui undecim alios invenerit — sagt Mersennus — noverit se analysim omnem, quae fuerit hactenus, superasse“, er hält aber doch die Erfindung derselben nicht unmöglich; und Leuneschlos sagt paradoxo 46 et 47: „Vastissima et infinita numerorum multitudo capit duntaxat decem numeros perfectos; qui decem alios invenerit, noverit se analysin omnem, quae fuerit hactenus, superasse“, welcher Zusatz aber überflüssig ist, wenn, nach des autoris Vorgeben, nur 10 numeri perfecti in rerum natura sind.



Goldbach.