LETTRE CLIII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur les nombres. Prix remportés par Euler à l'académie de Paris. Trouver un nombre qui appartienne à différentes séries de nombre polygonaux.

Berlin d. 3. April 1753.

Bei dem Einfall, ob etwan ab omni numero impari eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe, habe ich die Condition „a numero impari *non primo*" beygefügt, weil ich gleich befunden, dass solches bey dem numero primo 127 nicht angehet. Da nun solches auch bey dem numero non primo 959 nicht eintrifft, so fällt das ganze vermuthete theorema weg.

Wenn Ew. bey näherer Betrachtung befunden, dass wenn $4n+1$ ein numerus primus und d ein divisor quicunque ipsius n, auch allzeit sey $4n+1=daa+bb$, so bin ich sehr begierig zu vernehmen, ob Ew. diesen Satz demonstriren können, indem dadurch die pomoeria der theore-

matum de numeris primis in quadratos resolvendis allerdings ungemein würden erweitert werden. Ich habe auch eben diesen Satz schon längst bemerkt und bin von der Wahrheit desselben so überzeugt, als wenn ich davon eine Demonstration hätte. Also gleich wie $4.1m+1$ allzeit ist $=aa+bb$, welches ich demonstriren kann, so ist eben so gewiss $4.2m+1=2aa+bb$, $4.3m+1=3aa+bb$, $4.5m+1=5aa+bb$, etc. wovon mir aber die Demonstration noch fehlet. Doch ist hiebey ein besonderer Umstand wohl zu bemerken, dass bisweilen diese Resolution nicht in integris geschehen kann. Als, wenn gleich $4dm+1$ ein numerus primus ist, so gibt es Fälle, wo diese Zahl $4dm+1$ unmöglich in integris in die Form $daa+bb$ verwandelt werden kann. Dem ungeacht aber bleibt das theorema nicht weniger wahr, weil die Resolution allzeit in fractis Statt findet, welches um so viel mehr merkwürdig ist, da keine Zahl in fractis auf diese Formen $aa+bb$, $2aa+bb$, $3aa+bb$ und einige andere gebracht werden kann, wenn dieselbe nicht in integris darin enthalten. Dergleichen Fälle sind:

I. $4.22+1=89$ primus; folglich sollte 89 in dieser Form $11aa+bb$ enthalten seyn, welches aber in integris nicht angehet; doch ist in fractis $89=11(\frac{5}{2})^2+(\frac{9}{2})^2$ oder auch $=11(\frac{4}{3})^2+(\frac{25}{3})^2$.

II. $4.28+1=113$ primus; folglich sollte 113 in dieser Form $14aa+bb$ enthalten seyn, so in integris nicht möglich ist. In fractis aber ist $113=14(\frac{2}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

III. $4.34+1=137$ primus; und doch nicht in integris $137=17aa+bb$; in fractis aber ist $137=17(\frac{4}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

IV. $4.57+1=229$ primus; und doch nicht in integris $229=19aa+bb$; in fractis aber ist $229=19(\frac{5}{2})^2+(\frac{21}{2})^2$.

Bisher waren die Nenner nur 2 oder 3; es gibt aber auch Fälle, wo auch solche Brüche nicht Statt finden, sondern noch grössere Nenner zu Hülfe genommen werden müssen. Als $4.3.61+1=733$ primus; und ist doch nicht $733=61aa+bb$ in integris. Doch ist in fractionibus minimis $733=61(\frac{6}{5})^2+(\frac{127}{5})^2$. Demnach muss dieses theorema also ausgedruckt werden:

> Si $4n+1$ sit numerus primus, et d divisor ipsius n, tum iste numerus $4n+1$ certo in hac forma $daa+bb$ continetur, si non in integris, saltem in fractis,

und dieser Umstand wird auch insbesondere bey der Demonstration müssen in Betracht gezogen werden.

Da die Fälle, wo $2n-1=2a^2+p$ unico modo so sparsam vorkommen, so würde es freylich eine mühselige Arbeit seyn zu untersuchen, ob noch in einem andern unico modo $p=7$ seyn könnte, ausser $57=2.5^2+7$. Zum wenigsten habe ich bis 2500 keinen solchen gefunden. Wenn dieses behauptet werden könnte, so folgte daraus dieses theorema:

> Si $2aa+p$ unico modo est aggregatum ex duplo quadrato et numero primo, tum $2bb+p$ certo plus uno modo erit ejusmodi aggregatum, dum non sit $b=a$.

Ich konnte mich gar wohl erinnern, dass Ew. mir schon längst die Resolution von $n^{\sqrt{2}}$ communicirt, und weiss auch, dass ich solches unter meinen Papieren finden muss, allein es fället mir sehr schwer etwas daraus hervorzufinden, und ich konnte fast nicht mehr auf den Grund dieser Resolution kommen, bis mir ungefähr die Materie von der Interpolation wieder einfiel. Da nun proposita serie

$$\overset{0}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{2}{c},\ \overset{3}{d},\ \overset{4}{e},\ \text{etc.}$$

der terminus indici x respondens ist

$$(1-1)^x a+(1-1)^{x-1}xb+(1-1)^{x-2}.\frac{x(x-1)}{1.2}c+$$
$$(1-1)^{x-3}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}d+\text{etc.}$$

so ist der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $=$

$$a\sqrt{(1-1)}+\frac{b}{2\sqrt{(1-1)}}-\frac{1.1.c}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3d}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16}, etc. für a, b, c, d, e, etc. so ist $n^{\sqrt{2}}$ der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, folglich

$$n^{\sqrt{2}}=n(1-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.n^2}{2(1-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1.1.n^4}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3n^8}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun, ob primum terminum

$$n(1-1)^{\frac{1}{2}}=0,\quad n^{\sqrt{2}}=An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}$$

so wird

$$A=\frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$B=\frac{1.1}{2.4}(1-1)^{-\frac{3}{2}}=$$
$$\frac{1.1}{2.4}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3.5}{2.4}+\frac{3.5.7}{2.4.6}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$C=\frac{1.1.3}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{5}{2}}=$$
$$\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(1+\frac{5}{2}+\frac{5.7}{2.4}+\frac{5.7.9}{2.4.6}+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$

etc.

welches ohne Zweifel Ew. series numerorum rationalium sind, quarum singularum summa plus quam finita est.

Von dieser serie

$$An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}=n^{\sqrt{2}}$$

verdienet angemerkt zu werden, dass

$$An^2(2-\sqrt{2})-Bn^4(4-\sqrt{2})+Cn^8(8-\sqrt{2})-Dn^{16}(16-\sqrt{2})$$
$$+En^{32}(32-\sqrt{2})-\text{etc.}=0,$$

was auch immer n für eine Zahl seyn mag.

Bey den obigen Betrachtungen ist mir auch folgendes problema beygefallen:

Invenire summam duorum quadratorum $xx+yy$, quae simul in hac forma $2aa+bb$ contineatur.

Solutio. Sumantur $x=pp-qq$ et $y=rr\pm 2pq$, eritque $xx+yy=(pp-qq)^2+(rr\pm 2pq)^2=(pp+qq)^2\pm 4pqrr+r^4=(pp+qq-rr)^2+2(p\pm q)^2 rr$. Q. E. I.

Ew. haben die Güte sich zu erkundigen, wie viel Mal ich schon bey der Akademie zu Paris den Preis erhalten? Weil ich solches nicht aufgeschrieben und auch von meinen Pièccen keine Copien behalten, so kann ich weder die Jahre noch den Theil des Preises, so ich jedesmal bekommen, genau melden. Ich habe aber bey folgenden Fragen den Preis davongetragen: I. Sur la nature du feu. II. Sur le cabestan. III. Sur le flux et reflux de la mer. IV. Sur la théorie de l'aimant. V. Sur l'observation de l'heure du jour sur mer. VI. Sur les inégalités de Saturne. VII. Sur la même question.

Ich fand letztens, — weiss aber nich mehr, wo? — dieses problema: Invenire numerum, qui sit vel duplici, vel triplici, vel quadruplici modo, numerus polygonalis. Wollte man das problema so nehmen: invenire numerum qui simul sit trigonalis et tetragonalis, oder qui simul sit trigonalis et pentagonalis, etc. so liesse sich dasselbe wohl solviren. Kämen aber drey Bedingungen, als invenire numerum qui simul sit trigonalis, tetragonalis et pentagonalis, so wäre das problema vielleicht unmöglich. Bestimmt man aber den numerum laterum nicht, so ist es möglich, so viel Mal die Zahl auch ein numerus polygonalis seyn soll, und die Solution ist artig. Es sey z die gesuchte Zahl, x die radix,

und n die Anzahl der Seiten der Polygonalzahl, so wird

$$z=\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2},$$

hieraus wird

$$n=\frac{2z+2xx-4x}{xx-x}=2+\frac{2z-2x}{xx-x}=2-\frac{2z}{x}+\frac{2(z-1)}{x-1}.$$

Also muss sich $2z$ durch x, und $2z-2$ durch $x-1$ theilen lassen; d. i. quaeruntur duo numeri binario differentes, qui habeant divisores unitate differentes (major majorem, minor minorem), und wenn dieses auf vielerley Art geschehen kann, so ist z auf eben so vielerley Art ein numerus polygonalis. Zum Exempel:

Numeri binario differentes.	Divisores unitate differentes.			
450	3.	5.	9.	15.
448	2.	4.	8.	14.

(Die divisores $\left\{\begin{matrix}225\\224\end{matrix}\right\}$ lasse ich weg, weil daraus numeri digonales entständen).

Also sey $2z=450$ oder $z=225$, so ist folgendergestalt

I. $n=2-\frac{450}{3}+\frac{448}{2}=76$; II. $n=2-\frac{450}{5}+\frac{448}{4}=24$;

III. $n=2-\frac{450}{9}+\frac{448}{8}=8$; IV. $n=2-\frac{450}{15}+\frac{448}{14}=4$;

Dahero ist 225 I. tetragonalis, II. octogonalis, III. 24-gonalis et IV. 76-gonalis.

Dergleichen Zahlen nun zu suchen, ist gewiss ein problema, wo es insonderheit auf die Natur der Zahlen ankommt, und welches zu schönen Speculationen Anlass geben kann.

Euler.