LETTRE CLIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Développement ultérieur des recherches sur les propriétés des nombres.

Moscau d. 28. Juni 1753.

Eine rigorosam demonstrationem, dass $1+4ef=PP+4QQ$ habe ich zwar nicht gefunden, jedoch bin ich auf einige observationes affines gerathen, worinnen Ew. vielleicht finden werden *qu'il y a des vües.* Ich verstehe also in Folgendem durch p allezeit den numerum primum $1+4ef$ und $e>f$, imgleichen setze ich $aa+bb=p$. In einem gegebenen casu particulari wollte ich mich dieser Methode bedienen:

Zuvörderst suche ich numerum Q hujus naturae, ut

$$1+4ef+4fQQ=\square,$$

welches per substitutiones successivas $Q=1$, $Q=2$, etc. leicht zu seyn scheinet, indem viele numeri, ad hunc scopum non idonei, gleichsam bey dem ersten Anblick removiret

werden können, ex. gr. es wäre der gegebene numerus primus 89 und $f=2$, so siehet man alsofort, dass vor Q kein numerus desinens in 1 angenommen werden kann, weil sich das gesuchte quadratum auf 7 endigen würde, quod est absurdum; sobald nun ein solcher numerus congruus pro Q gefunden ist, setze ich die radicem quadrati inventi oder

$$\sqrt{(1+4ef+4fQQ)}=4fv+1,$$

wo v entweder affirmativa oder negativa zu nehmen ist, ut solutioni satisfiat, und alsdann findet sich

$$1+4ef=\frac{(e-v)^2+eQQ}{vv}.$$

Solchergestalt wird in denen von Ew. angeführten Zahlen in casu numeri 89, $Q=2$; numeri 113, $Q=1$; num. 137, $Q=2$; num. 229, $Q=5$; num. 733, $Q=3$. Hieraus folgt auch die doppelte Aequation

$$p=\frac{PP+eQQ}{vv}=\frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQQ}{(P+v)^2:ee}.$$

Ich bemerke ferner 1. dass weil die numeri a, b, e, f cogniti sind, es schon genug ist, wenn nur $p=\frac{RR\pm 2abe}{hh}$ Statt finden kann, so dass R und h rationales seyen, es mag $2ab$ ein numerus quadratus seyn oder nicht, denn es wird

$$Q=\frac{-(a+b)\pm R}{e+hh}=\frac{P-(a+b)}{h} \text{ und } p=aa+bb=PP+eQQ.$$

2. Habe ich beobachtet, dass wenn $1+4ef+4fQQ=\square$, der numerus Q entweder eines von beyden quadratis aa oder bb, oder doch einer von dererselben factoribus ist, als in 89, wo $a=8$, $b=5$, wird $Q=5$; in casu numeri $137=4^2+11^2$, wird $Q=2$, wiewohl ich von der allgemeinen Gewissheit dieser Observation noch nicht convinciret bin. Dagegen kann ich:

3. in summo rigore demonstriren, dass wenn α ein numerus hujus formae ist $\beta\beta + e\gamma\gamma$, alsdann auch

$$\alpha(e+xx)(e+yy)(e+zz) \text{ etc.} = PP + eQQ.$$

4. Dependiret die natura numerorum P et v in dieser aequatione $1+4ef = \frac{PP+eQQ}{vv}$ allerdings von dem numero e, denn es müssen PP et vv beyde so beschaffen seyn, dass sie, divisa per e, idem residuum hinterlassen, als z. Ex. in dem casu $89 = \frac{9^2+11.5^2}{2^2}$, allwo $e=11$, $PP=81$, $vv=4$, folglich das residuum commune post divisionem per 11 est $=4$. Hingegen müssen die residua quadratorum PP et QQ post divisionem per vv so beschaffen seyn, dass wenn das residuum respectu PP aequale α wird, das residuum respectu QQ aequale $\frac{uvv-\alpha}{e}$ werde, so dass u ein numerus integer sey; also wird in eodem exemplo

$$\alpha = 1, \quad \frac{uvv-\alpha}{e} = \frac{4u-1}{11} = 1$$

(weil 25 per 4 divisum, 1 zum residuo lässet) et $u=$ numero integro 3.

5. Will ich Ew. für die mir communicirte Solution des problematis: invenire duo quadrata quorum summa sit $PP+2QQ$, qualiscunque hostimenti loco die Solution des nachfolgenden problematis offeriren: invenire duo quadrata, quorum summa sit $PP+eQQ$, dato pro e numero quocunque. Sint n et e numeri quicunque, erunt

$$\left(\frac{4nn+e}{4n}\right)^2 + \frac{4ee}{(e-1)^2} = \left(\frac{4nn-e}{4n}\right)^2 + \frac{e(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

vel

$$\left(\frac{4nn+e}{4n}\right)^2 + \frac{4eemm}{(e-mm)^2} = \left(\frac{4nn-e}{4n}\right)^2 + e\left(\frac{e+mm}{e-mm}\right)^2$$

positis pro e, m, n numeris quibusvis.

Meine Expression für $n^{\sqrt{2}}$ bestehet in Folgendem: Sit

$$a=1,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1.3}{2.4},\ d=\frac{1.3.5}{2.4.6},\ \text{etc.},$$

dico

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{2}} = {} & (a+b+c+d+\text{etc})\,nn - (b+2c+3d+4e+\text{etc.})\,n^4 \\ & +(c+3d+6e+10f+\text{etc.})\,n^8 - (d+4e+10f+20g+\text{etc.})\,n^{16} \\ & +(e+5f+15g+35h+\text{etc.})\,n^{32} - \text{etc.} \end{aligned}$$

und differiret nicht von dieser

$$n^{\sqrt{2}} = nn - \frac{1}{2}(n^4-nn) + \frac{1.3}{2.4}(n^8-2n^4+nn) - \frac{1.3.5}{2.4.6}(n^{16}-3n^8+3n^4-nn) + \text{etc.}$$

welche den terminum respondentem exponenti $\frac{1}{2}$ in serie $n^{2^1}+n^{2^2}+n^{2^3}+n^{2^4}+$ etc. exprimiret.

Goldbach.