$$x = a(tt + evv + rr - ss) + 2r(bs - Pt - eQv)$$
$$y = b(tt + evv - rr + ss) + 2s(ar - Pt - eQv)$$

ubi quidem pro litteris r, s, t, v numeros quoscunque accipere licet. Tum autem utique erit $xx + yy = M^2 + eN^2$; fiet enim

$$M = P(rr + ss + tt - evv) + 2t(eQv - ar - bs)$$

et

$$N = Q(rr + ss - tt + evv) + 2v(Pt - ar - bs).$$

Solchergestalt werden nicht nur unendlich viele, sondern sogar alle mögliche Werthe für x und y gefunden.

In diesem problemate wird vorausgesetzt, dass schon ein casus, da $aa + bb = P^2 + eQ^2$ bekannt sey, um daraus alle übrige zu finden; allein dieses ist auch nicht einmal nöthig, sondern proposito numero e quocunque, können unmittelbar alle mögliche summae binorum quadratorum angegeben werden, welche zugleich in der Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sind. Man nehme nehmlich sogleich $a = exx - yy + zz$ und $b = 2yz$, so wird $aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$. Weil nun x, y und z nach Belieben angenommen werden können, so erstreckt sich diese Solution auf alle mögliche Fälle und scheinet also vor der vorhergehenden keinen geringen Vorzug zu haben.

Euler.

LETTRE CLXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 25. März 1756.

Die von Ew. angeführte aequatio

$$aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e(2xz)^2$$

ist aus unserer vorigen correspondance schon bekannt, welcher Umstand Deroselben vielleicht entfallen war. Sonst habe ich auch noch einen andern hierher gehörigen *lusum naturae* bemerkt, nemlich wenn $1 + 4efg = PP + eQQ$, erit etiam $1 + 4e(fg + effyyxx) = (P - 2efyx)^2 + e(Q - x)^2$ posita $x = \frac{4fPy + 2Q}{4efyy + 1}$; so oft nun $e(g + efyyxx)$ ein numerus quadratus ist (posito valore dicto ipsius x), so oft kann $PP + eQQ$ in diese Form verwandelt werden $MM + fNN$, existentibus M et N rationalibus, denn es wird seyn

$$M = (P - 2efyx) \text{ und } N = Q - x.$$

Goldbach.

P. S. d. 27 März 1756. Es scheinet, dass die Uebereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. je länger je gemeiner werden, wie es in dem letzten abermal

$$x = 4fPy + 2Q \text{ und nicht } x = \frac{4fPy+2Q}{4efyy+1}$$

hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu corrigiren bitte. Im übrigen wird vielleicht dieses raisonnement zum Beweise, dass ein numerus primus von dieser Form $1+4efg$ in $PP+eQQ$ verwandelt werden kann, etwas beytragen:

Si positis e, f, g rationalibus, fieri potest

$$1+4efg = PP+eQQ$$

ita ut P et Q sint rationales, poterit etiam fieri

$$1+4efg = MM+fNN = RR+gSS$$

ita ut M, N, R, S sint rationales (cum in numero $1+4efg$ numeri e, f et g sint natura sua permutabiles). Atqui in quovis numero primo $1+4efg = aa+bb$ verum est prius (nam poni potest $e=1$, $P=a$, $Q=b$), ergo et posterius.

LETTRE CLXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet.

Berlin d. 17. April 1756.

Es hat seine völlige Richtigkeit, dass wenn $1+4efg = P^2+eQ^2$, auch seyn werde

$$(P-2efyx)^2 + e(Q-x)^2 = 1+4ef(g-efy^2x^2)$$

posita $x = 4fPy+2Q$, und also auch dass, so oft $e(g+efy^2x^2)$ ein quadratum ist, diese Form in M^2+fN^2 verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn. Denn da e, f, g numeri inter se primi zu seyn pflegen, so sind die factores e und $g+efy^2x^2$ inter se primi, folglich kann ihr Product kein quadratum seyn; es wäre denn, dass man für y, x numeros fractos zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Denn es sey $e=2, f=5$ und $g=1$,