P. S. d. 27 März 1756. Es scheinet, dass die Uebereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. je länger je gemeiner werden, wie es in dem letzten abermal

$$x = 4fPy + 2Q \text{ und nicht } x = \frac{4fPy + 2Q}{4efyy + 1}$$

hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu corrigiren bitte. Im übrigen wird vielleicht dieses raisonnement zum Beweise, dass ein numerus primus von dieser Form $1 + 4efg$ in $PP + eQQ$ verwandelt werden kann, etwas beytragen:

Si positis e, f, g rationalibus, fieri potest

$$1 + 4efg = PP + eQQ$$

ita ut P et Q sint rationales, poterit etiam fieri

$$1 + 4efg = MM + fNN = RR + gSS$$

ita ut M, N, R, S sint rationales (cum in numero $1 + 4efg$ numeri e, f et g sint natura sua permutabiles). Atqui in quovis numero primo $1 + 4efg = aa + bb$ verum est prius (nam poni potest $e = 1$, $P = a$, $Q = b$), ergo et posterius.

LETTRE CLXV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet.

Berlin d. 17. April 1756.

Es hat seine völlige Richtigkeit, dass wenn $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, auch seyn werde

$$(P - 2efyx)^2 + e(Q - x)^2 = 1 + 4ef(g - efy^2x^2)$$

posita $x = 4fPy + 2Q$, und also auch dass, so oft $e(g + efy^2x^2)$ ein quadratum ist, diese Form in $M^2 + fN^2$ verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn. Denn da e, f, g numeri inter se primi zu seyn pflegen, so sind die factores e und $g + efy^2x^2$ inter se primi, folglich kann ihr Product kein quadratum seyn; es wäre denn, dass man für y, x numeros fractos zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Denn es sey $e = 2, f = 5$ und $g = 1$, also $1 + 4efg = 41 = 3^2 + 2.4^2$. Dahero $P = 3$ und $Q = 4$. Nun nehme man $x = 4fPy + 2Q = 60y + 8$, so ist allerdings $1 + 40(1 + 10y^2x^2) = (3 - 20yx)^2 + 2(4 - x)^2$. Es wäre also die Frage, ob $e(g + efy^2x^2) = 2(1 + 10y^2x^2)$ ein quadratum seyn könnte, welches aber unmöglich ist, so lang für x und y nur numeri integri angenommen werden. Wollte man aber auch Brüche zulassen, und für x seinen Werth $60y + 8$ setzen, so wäre $yx = 60y^2 + 8y$, also $y^2x^2 = 3600y^4 + 960y^3 + 64yy$, und dahero geriethe man auf diese Frage, ob folgende Formul

$$72000y^4 + 19200y^3 + 1280y^2 + 2$$

ein Quadrat seyn könne. Wenn sich aber auch solches nach vieler Mühe finden sollte, so sehe ich nicht, was man damit gewonnen hätte. Inzwischen ist aber gewiss, dass diese Formul auch in gebrochenen Zahlen niemals ein Quadrat werden könne. Denn eher man noch den Werth für x substituirt, so setze man $yx = m$, also $2 + 20m^2 = \square$. Ferner $m = \frac{n}{4}$, folglich $2 + \frac{5}{4}nn = \square$ oder $5nn + 8 = \square$, welches offenbar unmöglich ist.

Das von Ew. angeführte Argument, dass wenn

$$1 + 4efg = P^2 + eQ^2,$$

auch seyn müsse $1 + 4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2$, weil kein Grund vorhanden wäre, warum eine solche Auflösung bey einem der Factoren e, f, g mehr Platz haben sollte, als bey den andern, würde in der Metaphysic für eine herrliche Demonstration passiren können, wo man sich mit Beweisthümern zu begnügen pflegt, welche bey weitem nicht so bündig sind. Allein in der Mathematic kommen mir dergleichen Schlüsse immer verdächtig vor. Ew. dehnen zwar diesen Satz auf alle numeros rationales überhaupt aus, in

welchem Fall ich denselben für wahr halte, wenn nur $1 + 4efg$ ein numerus primus ist; welche nothwendige Bedingung gleichwohl im argumento nicht enthalten ist, und auch nicht erhellet, warum dieselbe hinzugesetzt werden sollte. Ohne diese Bedingung aber ist der Satz falsch, denn $1 + 4.1.5$ ist wohl $= P^2 + 5Q^2$ und doch ist $1 + 4.1.5 = M^2 + 1.N^2$ unmöglich. Hernach, wenn man auch Mittel fände, die Bedingung, dass $1 + 4efg$ ein numerus primus seyn müsse, in den Beweis einzuflechten, so sehe ich keinen Grund, warum der Satz nicht auch wahr seyn sollte, wenn für P, Q, M, N, R, S nicht nur numeri rationales, sondern auch integri genommen würden; denn wenn die Reduction $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$ in integris Platz hat, so enthält der angegebene Beweis keinen Grund, warum die andern Reductionen nicht auch in integris Platz haben sollten. Allein in diesem Fall ist der Satz nicht mehr der Wahrheit gemäss, wie aus diesem Exempel erhellet: Es sey $e = 3$, $f = 5$, $g = 11$, so wird $1 + 4efg = 661$ (numero primo). Nun ist zwar $661 = 19^2 + 3.10^2$ und auch $661 = 16^2 + 5.9^2$; doch aber kann die dritte Resolution $661 = R^2 + 11.S^2$ in integris auf keinerley Art bestehen. In Brüchen findet dieselbe aber Statt, indem $661 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{15}{2}\right)^2$; woraus klar abzunehmen, dass in dergleichen ratiociniis die grösste Behutsamkeit gebraucht werden müsse. Ich habe solches bey einigen, über einige theoremata Fermatiana gegebenen Demonstrationen zur Genüge erfahren. Als z. Ex. war der Beweis sehr leicht, dass wenn zwey summae duorum quadratorum mit einander multiplicirt werden, das Product auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse, indem

$$(aa + bb)(cc + dd) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2.$$

Wer sollte nun daraus nicht schliessen, dass wenn eine summa duorum quadratorum durch eine andere summam duorum quadratorum getheilt werden kann, der Quotient nicht auch eine summa duorum quadratorum seyn müsse?

Die Sache ist zwar wahr; allein der erwähnte Schluss ist unrichtig, denn wenn derselbe richtig wäre, müsste auch dieser richtig seyn: Productum ex duobus numeris paribus semper est par: ergo si numerus par per alium sit divisibilis, quotus quoque erit par; welches doch offenbar falsch wäre.

Euler.

LETTRE CLXVI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet.

St. Petersburg d. 18. Mai 1756.

Was die Aequation

$$1+efg=PP+eQQ=MM+fNN=\text{etc.}$$

betrifft, bin ich mit Ew. einerley Meinung, indem die Natur der Zahlen P, Q, M etc., nehmlich ob es numeri integri, oder fracti, oder surdi seyn sollen, nicht bestimmet wird, ohngeachtet die numeri integri e, f und g permutabiles sind. Dass aber die grosse Zahl $72000y^4+19200y^3+1280yy+2$ kein Quadrat seyn kann, folget alsofort, wenn man dieselbe als ein exemplum regulae von $4n+2=\Box$ betrachtet.

Indessen bekenne ich, dass ich noch nicht recht einsehe, warum Ew. zur Wahrheit dieser Aequation

$$1+4ef=PP+eQQ$$