erfordern, dass $1+4ef$ ein numerus primus sey, wenn P et Q rationales seyn sollen, da allein in dem casu, ubi $f=e+kk-1$ unzählige Exempel vorhanden sind, dass auch numeri non primi diese Eigenschaft haben können, als posita $e=k=3$, fit $1+4.3.11=5^2+3.6^2$.

Nachfolgendes theorema halte ich pro demonstrabili: Sit $p=aa+bb$ et sit $1+mQQ$ summa duorum quadratorum, erit etiam $p=aa+bb=PP+(xx-mp)QQ$, ita ut, si reliqui numeri sint rationales, fiat etiam x rationalis.

Goldbach.

LETTRE CLXVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet.

Berlin d. 11. Juni 1756.

Dass diese grosse Zahl $72000y^4+19200y^3+1280y^2+2$ kein Quadrat seyn könne, folget nur alsdann aus der Formul $4n+2=\square$, wenn y ein numerus integer ist. So viel ich mich aber erinnere, begriff y auch numeros fractos, und da wird allerdings eine besondere Demonstration erfordert. Man darf nur diese Formul $8xx+2$ betrachten, welche, wenn x auch ein Bruch seyn kann, infinitis modis ein Quadrat seyn kann, als $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{2}$, etc. Dass nun ein Gleiches bey der obigen Formul nicht Statt finde, muss besonders bewiesen werden.

Dass ich zur Wahrheit dieser Aequation $1+4ef=PP+eQQ$ erfordere, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, ist die Ursach, weil wenn $1+4ef$ kein numerus primus ist, solche Fälle vorkommen, da $1+4ef$ nicht dieser Formul $PP+eQQ$ gleich seyn kann; denn es sey z. Ex. $e=1$, $f=5$, so ist gewiss $1+4ef=21$ nicht gleich $PP+QQ$. Inzwischen gebe ich gern zu, dass $1+4ef=PP+eQQ$ in unendlich vielen Fällen wahr ist, wenn gleich $1+4ef$ kein numerus primus ist. Wenn aber auch nur ein einiger Fall in contrarium könnte angeführt werden, so wäre derselbe hinlänglich die Wahrheit des Satzes zu zernichten. Hingegen, wenn diese Bedingung hinzugesetzt wird, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so kann kein Fall in contrarium angeführt werden, wenn man nehmlich für P und Q die Brüche nicht ausschliesst, und deswegen glaube ich, dass der Satz wahr sey, ungeacht ich denselben nicht beweisen kann. Wenn aber die Bedingung, dass $1+4ef=$ numero primo, weggelassen wird, so kann man sicher behaupten, dass der Satz $1+4ef=PP+eQQ$ nicht wahr sey, weil die Anführung eines einzigen Exempels in contrarium hinreichend ist, denselben umzustossen.

Wenn man aber für P und Q nur numeros integros zulässt, zugleich aber die Condition festsetzt, dass $1+4ef$ ein numerus primus seyn müsse, so ist die Aequation $1+4ef=PP+eQQ$ in genere gewiss nicht demonstrabel, indem ich unendlich viel Fälle in contrarium anführen kann. Ja, das von Ew. angeführte Exempel, dass $1+4.3.11=133=5^2+3.6^2$, ungeacht 133 kein numerus primus ist, reichet eine Exception dar, indem $1+4.3.11$ nicht ist P^2+11Q^2, welches gleichwohl seyn müsste, wenn der Satz allgemein wahr wäre.

Das theorema, so Ew. anführen, dass wenn $p=aa+bb$ und $1+mQ^2$ summa duorum quadratorum, auch seyn werde $p=aa+bb=P^2+(xx-mp)Q^2$, ist nicht nur demonstrabel, sondern man kann auch in genere die Werthe für P und x anzeigen, welche dieser Aequation ein Genüge leisten. Denn es sey $1+mQ^2=rr+ss$, so nehme man $P=ar-bs$ und $x=\frac{as+br}{Q}$, alsdann wird augenscheinlich $aa+bb=P^2+(xx-mp)Q^2$. Denn da

$$P^2=aarr-2abrs+bbss$$
$$xxQQ=aass+2abrs+bbrr$$
$$-mpQQ \text{ (ob } p=aa+bb) = -maaQQ-mbbQQ$$

folglich $P^2+(xx-mp)Q^2=$

$$(aa+bb)(rr+ss)-m(aa+bb)QQ=aa+bb,$$

weil $rr+ss=1+mQ^2$, per hypothesin.

Euler.