durchblättert und darin die grossen éloges welche Ew. an unterschiedenen Orten so billig beygelegt werden, mit ungemeinem Vergnügen beobachtet. Dero Hrn. Sohne gratulire ich von ganzem Herzen zur abermaligen Petersburgischen pièce victorieuse.

Goldbach.

P. S. Ich habe observiret, dass der Aequation

$$aa + bb = PP + eQQ$$

allezeit ein Gnügen geschiehet positis

$$P = \frac{bb - aa}{b},\; e = 3bb - aa,\; Q = \frac{\pm a}{b},$$

woraus unzählige dergleichen valores pro summa $aa + bb$ formiret werden können.

LETTRE CLXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Décomposition des nombres en carés; suite. Autre théorème de nombres.

Berlin d. 9. November 1762.

Die Frage, welche Ew. zu berühren belieben, was für Zahlen in einer jeden von diesen Formuln $aa + bb$ und $pp + eqq$ zugleich enthalten sind? ist in der Lehre von den Zahlen nicht nur von der grössten Wichtigkeit, sondern fasset auch solche besondere Schwierigkeiten in sich, welche dieselbe höchst merkwürdig machen, insonderheit wenn mehr als zwey Formuln vorgeschrieben werden. Wenn nur zwo gegeben sind, und man sucht alle Zahlen N, so zugleich in diesen beyden Formuln $aa + mbb$ und $cc + ndd$ enthalten sind, wo m und n gegebene Zahlen sind, so finde ich $N = (mpp + nqq + rr + mnss)^2 - 4mn(pq - rs)^2$, denn daraus wird

$$N = (mpp - nqq - rr + mnss)^2 + m(2pr + 2nqs)^2 = (mpp - nqq + rr - mnss)^2 + n(2qr + 2mps)^2.$$

Wenn aber mehr als zwey dergleichen Formuln vorgegeben sind, in welchen die Zahlen N enthalten seyn sollen, so hört die algebraische Hülfe fast gänzlich auf, und eben deswegen ist es um so viel merkwürdiger, dass alsdann dergleichen Fragen auf eine ganz andere Art ganz leicht aufgelöset werden können, wobey aber der Beweis noch fehlet. Also wenn solche Zahlen verlangt werden, so zugleich in diesen Formuln $aa + bb$, $cc + 2dd$, $ee + 3ff$, $gg + 5hh$, enthalten sind, so darf man nur die Zahl nehmen, die sich durch die gegebenen 1, 2, 3, 5 theilen lässt: diese ist nun 30. Alsdann, so oft $4.30x + 1 = 120x + 1$ ein numerus primus ist, so hat man eine Zahl für N, und zwey oder mehr dergleichen numeri primi, mit einander multiplicirt, geben ebenfalls Zahlen für N. Dahero sind diese numeri primi $120x + 1$ folgende: 241, 601, 1201, 1321, 1801 etc. von welchen der erste

$$241 = 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2.6^2 = 7^2 + 3.8^2 = 14^2 + 5.3^2,$$

wobey dieses insbesondere zu merken ist, dass diese Eigenschaft nur den in der Formul $120x + 1$ enthaltenen numeris primis zukommt. Hernach, da Ew. gezeigt, dass eine summa duorum quadratorum $aa + bb$ auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten ist, wenn $e = 3bb - aa$ oder $3aa - bb$, ja noch allgemeiner, wenn $e = (2\alpha + 1)bb - \alpha\alpha aa$, so können daher noch gar schöne Erläuterungen der obigen Eigenschaften gezogen werden, als z. Ex. dass eine solche Zahl $aa + nbb$ auch zugleich in dieser Form

$$PP + ((2\alpha + n)aa - \alpha\alpha bb)QQ$$

enthalten ist, wo es sich aber fügen kann, dass P und Q Brüche seyn müssen. Als, es sey $a = 7$, $n = 3$, $b = 8$ und

die Zahl $aa + nbb = 241$, so ist dieselbe auch in dieser Form $PP + eQQ$ enthalten, sumto

$$e = (2\alpha + 3)\,49 - 64\alpha\alpha = 147 + 98\alpha - 64\alpha\alpha = 147 + 49\beta - 16\beta\beta \text{ (posito } 2\alpha = \beta).$$

Solche Zahlen für e sind demnach

$$147, \quad 82, \; 181, \; 150, \; 87, \; 180, \; -15,$$

oder (per □ dividendo) 3, 5, 6, 82, 87, 181, wobey also sehr merkwürdig ist, dass die Zahl 241 auch in dieser Form $PP + 82QQ$ enthalten ist, welches aus obiger Regel nicht kann erkannt werden, denn hier ist $P = \frac{81}{7}$ und $Q = \frac{8}{7}$.

Den Beweis von dem theoremate numerico, wovon letztens Ew. Erwähnung zu thun die Ehre gehabt, ist auch ganz sonderbar. Ich betrachtete diesen Bruch

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{ etc.}},$$

vom welchem bekannt ist, dass sich derselbe in diese einfache Brüche $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \text{etc.}$ auflösen lässt, und die Zahlen A, B, C, numeri constantes werden, wenn nur der exponens n kleiner ist, als der numerus factorum in denominatore. Nun aber bestimme ich die Zähler A, B, C, etc. folgendergestalt: Um A zu finden, multiplicire ich alles in $x - a$ und bekomme

$$A = \frac{x^n}{(x-b)(x-c)\text{ etc.}} - \frac{B(x-a)}{x-b} - \frac{C(x-a)}{x-c} - \text{etc.},$$

und weil ich weiss, dass A nicht von x dependirt, so muss für A immer einerley Werth herauskommen, ich mag für x annehmen was ich will. Ich setze also $x = a$, und da bekomme ich $A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\text{ etc.}}$, ebenso wird

$$B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\text{ etc.}}, \quad C = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\text{ etc.}},$$

also ist in genere

$$\frac{x^n}{(x-a)(x-b)(x-c)\text{ etc.}} = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)\ldots(x-a)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)\ldots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)\ldots(x-c)} + \text{etc.}$$

und diese letztern Brüche auf die andere Seite hinübergetragen:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-x)} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-x)} + \text{etc.} = 0.$$

Euler.

LETTRE CLXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mécontentement de la tournure que prennent les affaires de l'Académie de Berlin. Allusion au retour d'E. en Russie.

Berlin d. 1. October 1763.

(Extrait).

— — Noch hat sich hier der Anschein nicht verloren, dass die hiesige Akademie in eine Académie françoise verwandelt werden soll. So sehr ich mich vor einer nochmaligen Ortsveränderung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Fall dazu entschliessen müssen, und nichts würde mich dabey herzlicher erfreuen, als Ew. nochmals sehen zu können.

Euler.