Vehementer etiam te rogo, vir clarissime, ut mihi ignoscas, quod ad tuas priores litteras m
commercium nostræ urbis cum Italia
ut nisi per mercatores promoveatur non
possit. Quare cum mihi jam mercatorem tuum indicaveris, has litteras ad eum per mercatorem mittere rogo, ad quem etiam tuam responsionem, qua forte me honorare volueris, per tuum mercatorem mittere vellem.

Quod autem in prioribus litteris de analogia differentialium cujusque ordinis formulæ xy et terminorum binorum potestatis $(a+b)^m$ attulisti, eam jam a Leibnizio observatam esse memini quod, nisi fallor, in ejus cum Bernoullio commercio (¹) reperies. Vale et fave

Tibi addictissimo

L. Eulero.

A Monsieur Durand pour remettre s. l. p. à M. Louis Grange Tournier, à Turin.

Au dos, de la main de Lagrange : *sig^r L. Eulero, dei* 6 7^bre 1755.

4.

LAGRANGE A EULER.

Taurini, die 20 novembris 1755 (²).

Vir amplissime atque celeberrime, fautor colendissime.

Redditæ mihi sunt, dum ruri essem, literæ tuæ exspectatissimæ, ex quibus jucundissimum præter modum fuit intelligere meditatiunculas

(¹) Voir *Virorum celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum*, 1745, in-4°, t. I., Epistola XII, p. 65. — *Voir* t. XIII, p. 313.
(²) *Lettres inédites*, p. 13.

illas meas de maximorum et minimorum methodo, tibi non parum fuisse probatas. Doleo vehementer, vir clarissime, quod nonnullis ferme inopinatis occupationibus distentus, tibi protinus respondere non potuerim. Factum enim est, ut electus fuerim Professor in scholis nostris mathematicis militaribus [1], quod sane munus mihi, aliud cogitanti, et nondum adhuc viginti annorum juveni delatum, negotia plurima, et quæ nullo modo differri liceret, non potuit non facessere; quamobrem te etiam, atque etiam rogo, ut mihi ignoscere velis hanc in rescribendo moram omnino involontariam; maximas porro, quas possum, gratias tibi refero, pro tot tantisque honoris, atque affectus erga me testimoniis, quibus literas tuas abundare animadverti. Ego sane, si quid tua attentione dignum confeci, id procul dubio totum tibi debere agnosco. Eximia enim opera tua, illa sunt præcipue quæ me ad ipsius Analyseos profundiora perduxerunt. Quapropter me tibi gratissimum semper, ac maximum quocunque modo debitorem profiteor. Jamvero in epistola tua, te exoptare ostendis ut ego analysim illam diligentius adhuc excolam, utpote ex qua sublimiora forsan erui possint, et simul etiam humanissimis, ac perquam honorificis verbis ad id me cohortari non dedignastis; igitur non te ægre laturum puto si tenuia aliqua, quæ de hac re postea habui cogitata, aperiendo, tibi fortassis molestiam creavero.

In superioribus meis dixi, me eadem analysi determinare posse curvas citissimi appulsus ad datam lineam; en itaque quomodo rem perago :

Sit AQN curva brachistochrona simul, et citissimi appulsus ad datam lineam BNn, in qua ponitur $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{PQ} = y$, $\mathrm{AM} = a$, $m\mathrm{M} = dx$; sitque alia infinite parum discrepans, an, quam curvam differentiationis voco, quæque oritur singulis applicatis y incremento suo indefinito δy crescentibus; nunc quoniam formula maxima, minimave facienda est $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$, denotante u altitudinem celeritati debitam, ponatur esse primò $\delta u = \nu\,\delta y$, et habebitur pro differentiali ipsius $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ dum curva AQN

[1] A l'École d'Artillerie de Turin.

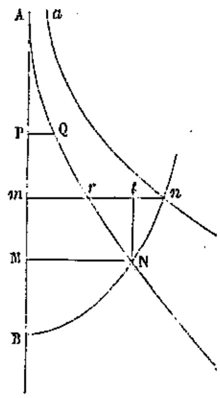
in an transit, hic valor

$$-\int \frac{ds\, v\, \partial y}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{dy\, \partial dy}{ds\sqrt{u}}$$

quod reducitur ad

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{v\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}}\right) dy + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\partial y.$$

Verum quia ex hypothesi citissimi appulsus integrale $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ pro curva AQN accipi debet per totam AM, loco, quod pro an accipiendum est



tantum per Am, hinc sit ut mutata curva AQN in an hoc integrale decrescat suo elemento quod respondet elemento M$m = dx$, axis AM; igitur verum ipsius $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ differentiale hoc casu fiet

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{v\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}}\right) \partial y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\partial y - \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

ponendo in his duobus postremis terminis a pro x; quod adeo nihilo æquatum dabit : primò pro æquatione ad curvam quæsitam,

$$-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{v\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(ut nempe nullum ex indeterminatis ∂y in ipsa ingredi possit) deinde præbebit etiam, pro puncto intersectionis N quod respondet abscissæ $= a$, hanc alteram æquationem

$$\frac{dy}{ds\sqrt{u}}\,\delta y = \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

seu

$$dy\,\delta y = ds^2;$$

seu, quia hoc loco

$$dy = rt, \qquad \delta y = rn \qquad \text{et} \qquad ds = r\text{N}, \qquad rt \times rn = \overline{r\text{N}}^2;$$

unde conficitur angulum intersectionis $r\text{N}n$ esse debere rectum; cæterum levi attentione perspicitur nisi sit $\delta u = v\,\delta y$ (quod quidem evenit nisi sit u functio determinata ipsorum x et y) hanc proprietatem locum amplius habere non posse; unde sub hac limitatione intelligi debere videtur prop. tua 44 tomi 2[di] ægregii mechanices operis. Hæc porro methodus, quomodo et ad alios magis compositos casus possit nullo negotio accommodari, tibi certe supervacaneum foret ostendere; sufficiat hæc ita leviter attigisse.

Transibo igitur ad aliud, quod in illa analysi observavi et super quo judicium tuum doctissimum præcipue exopto; nempe quoniam ex natura maximorum, et minimorum, ut rectissime in epistola tua ais, esse tantum debet $\delta \int z = 0$ (pono pro formula integrali indefinita, $\int z$ tantum, loco quod tu posuisti $\int z\,dx$; quia enim mihi non opus sunt substitutiones tuæ $p\,dx$ pro dy...; inutile foret velle omnes formulas ad hanc $\int z\,dx$ reducere, quod aliquando nisi illarum substitutionum ope non efficitur) evidens est, si plures formæ valori ipsius $\delta \int 0$ conciliari possint, plures etiam haberi posse diversas æquationes, quas tamen omnes datis sub conditionibus satisfacere necesse sit. Jam vero $\delta \int z$ exprimitur per

$$\int (\text{N} - d\text{P} + d^2\text{Q} - \ldots)\,\delta y + (\text{P} - d\text{Q} + \ldots)\,\delta y + (\text{Q} - \ldots)\,d\,\delta y + \ldots;$$

sed posito, brevitatis gratia, $\text{N} - d\text{P} + d^2\text{Q} - \ldots = \text{L}$, est

$$\int \text{L}\,\delta y = \text{L}\int \delta y - \int d\text{L}\int \delta y = \text{L}\int \delta y - d\text{L}\int^2 \delta y + \int d^2\text{L}\int^2 \delta y,$$

et sic in infinitum, unde habetur $\delta \int z =$

1°

$$\int L\,\delta y + (P - dQ + \ldots)\,\delta y + (Q - \ldots)\,d\,\delta y;$$

2°

$$\int dL \int \delta y + L \int \delta y + (P - dQ + \ldots)\,\delta y + \ldots;$$

3°

$$\int d^2 L \int^2 \delta y - dL \int^2 \delta y + L \int \delta y + (P - dQ + \ldots)\,\delta y + \ldots;$$

et sic ulterius procedendo. Unde, si ponatur, in loco ubi $x = a$, evanescere δy, $d\,\delta y$, ..., fiet, ex 1° valore, $\delta \int z = \int L\,\delta y$, ex quo æquatio pro curva oritur $L = 0$, quæ ideo eam præbet curvam, ut notum est, quæ maximorum minimorumque proprietate gaudeat inter omnes, quo pro puncto abscissæ $= a$ tum datam habeant applicatam tum etiam datam tangentis ad axem inclinationem, etc.; si vero etiam præterea totum $\int \delta y$ ponatur hoc $\omega = 0$, tam ex 2° valore haberetur :

$$\delta \int z = -\int dL \int \delta y$$

ex quo pro curva quæsita sit $dL = 0$, quæ adeo maximorum, minimorumque data proprietate gauderet inter omnes, quæ præter supradictas conditiones habebunt etiam hanc ut summa omnium incrementorum δy sit $= 0$; simili modo reperiretur ex 3° valore, ponendo etiam $\int^2 \delta y = 0$; hæc æquatio $d^2 L = 0$ pro curva in qua adesset præterea conditio ista ut tota summa 2$^{\text{di}}$ gradus ipsorum δy fieret evanescens; et sic de cæteris.

Jam vero quum posito $\int \delta y = 0$ necessario curva differentiationis secare debeat priorem in aliquo puncto intermedio, et posito præter $\int \delta y = 0$, etiam $\int^2 \delta y = 0$, tum duo existere debeant intersectionis puncta, concludi mihi posse videtur æquationes has

$$dL = 0, \qquad d^2 L = 0, \qquad \ldots,$$

locum habere debere, in quadam curva, quæ data proprietate sit prædita, ubi præter extrema, etiam aliqua data sunt intermedia puncta, per quæ ipsa transire debeat; nempe si habeatur unum, tum satisfaciet $dL = 0$, si duo, $d^2 L = 0$, ...

Hinc fieret ut quærendo brachistochronam per data tria puncta transeuntem haberetur non ciclois, sed alia orta ex hac æquatione

$$d^2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$$

seu

$$d \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}},$$

quæ in cycloidem mutatur facto $\omega = \infty$.

Hæc sunt, vir clarissime, quibus te gravissimis forsan distentum nunc interpellare audeo; tuos nunc acutissimos sensus intelligere mihi maxime est in votis; si gratiam hanc mihi facere non dedignaberis, hoc certe mihi animos addet ad ulterius in hac re inquirendum.

Quæ tum circa superficies, tum alias etiam quæstiones meditatus sum in aliud reservabo tempus; tuum de scientia navali ([1]) opus eximium perlegi, et re vera quidem insignia plura hujusmodi problemata soluta animadverti.

Verum jam tempus est ut longæ huic epistolæ finem imponam; quamobrem dum te enixe rogo ut has tenues meas res non iniquo velis animo accipere, favori tuo atque benevolentiæ inestimabili me humillime commendo. Vale et fave

Tibi deditissimo ac adstrictissimo

LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

P. S. Quod ad tuas ad me literas attinet, rectissime facies si illas mercatori Durando inscribere, quo mihi remittantur, perges.

([1]) *Voir* plus haut, p. 145, note.