20.

EULER A LAGRANGE.

Berlin, le 16 février 1765 (¹).

Monsieur,

La gracieuse déclaration que vous venez de me faire de la part de la Société royale de Turin devait sans doute faire la plus vive impression sur mon esprit; aussi en suis-je entièrement pénétré de la plus respectueuse reconnaissance; ce que je vous prie de lui témoigner avec la plus forte assurance que je saisirai avec le plus grand empressement toutes les occasions, où je serai capable de rendre quelques services à cette illustre Société, à laquelle je prends la liberté de présenter les pièces ci-jointes, dont deux roulent aussi sur le mouvement des cordes (²). M. d'Alembert m'a aussi fait quantité d'objections sur ce sujet; mais je vous avoue qu'elles ne me paraissent pas assez fortes pour renverser votre solution. Ce grand génie me semble un peu trop enclin à détruire tout ce qui n'est pas construit par lui-même. Quand la figure initiale de la corde n'est pas telle qu'il prétend qu'elle devrait être, je ne saurais me persuader que son mouvement fût différent de celui que notre solution lui assigne; et, quand M. d'Alembert soutient que, dans ces cas, le mouvement ne saurait être compris sous la loi de continuité, je lui accorde très volontiers cette remarque, mais je soutiens aussi à mon tour que ma solution donne ce même mouvement discontinu; car c'est une propriété essentielle des équations différentielles à trois et à plusieurs variables, que leurs intégrales renferment des fonctions arbitraires qui peuvent aussi bien être discontinues que continues.

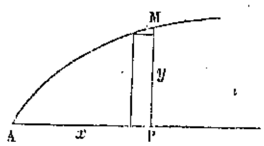
Après cette remarque, je vous accorde aisément, monsieur, que pour que le mouvement de la corde soit conforme à la loi de continuité, il

(¹) Ms. t. IV, f° 19 *bis*. — *Opera postuma*, t. I, p. 566.

(²) Le Tome III des *Miscellanea taurinensia* contient cinq Mémoires d'Euler et, entre autres, *Éclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes*. — *Recherches sur le mouvement des cordes inégalement épaisses*.

faut que, dans la figure initiale, les $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^6y}{dx^6}, \cdots$ soient égales à o aux deux extrémités; mais, quoique ces conditions n'aient pas lieu, je crois pouvoir soutenir que notre solution donnera néanmoins le véritable mouvement de la corde; car, dans ce cas, il y aura bien quelque erreur dans la détermination du mouvement des éléments extrêmes de la corde; mais, par cette même raison, l'erreur sera infiniment petite, et partant nulle.

Toutes les circonstances de ce problème ne me sont plus assez présentes pour oser prononcer plus hardiment là dessus; mais il me semble que par de semblables objections, dont M. d'Alembert combat notre solution, on pourrait combattre les vérités les mieux constatées. Par exemple, je dirais que la formule $\int y\,dx$ ne saurait donner l'aire d'une courbe APM, à moins qu'il ne soit $\frac{dy}{dx} = 0$ au commen-



cement A où $y = 0$; car, puisque dans chaque élément de l'aire, qui est véritablement égale à $y\,dx + \frac{1}{2}dx\,dy$, on néglige le petit triangle $\frac{1}{2}dx\,dy$, cela ne saurait plus être pratiqué au commencement A où y, et partant le premier membre $y\,dx = 0$, attendu que là le second membre $\frac{1}{2}dx\,dy$ pourrait même être infiniment plus grand que le premier, à moins qu'il ne fût $\frac{dy}{dx} = 0$. Comme donc, nonobstant cette objection, la formule $\int y\,dx$ exprime toujours la véritable aire de la courbe, je crois aussi que notre solution sur les cordes donne toujours le vrai mouvement, quoique le premier et le dernier élément soient assujettis à un grand inconvénient, ou même à une contradiction apparente. M. d'Alembert témoigne partout un trop grand empressement de rendre douteux tout ce qui a été soutenu par d'autres, et il ne permettra jamais qu'on fasse de semblables objections contre ses propres recherches.

J'avais déjà reçu le projet de la nouvelle édition des Ouvrages de

Leibnitz ([1]), et je crois que M. Formey aura déjà marqué à l'éditeur qu'on vient de découvrir à Hannover quantité d'Ouvrages manuscrits de ce grand homme, dont on a nouvellement publié les remarques sur Locke. Sur la fameuse controverse touchant le Calcul différentiel ([2]), je ne saurais dire autre chose que ce que j'avais déjà dit dans la préface de mon Calcul différentiel ([3]).

Le XIVe Volume de nos Mémoires est sous la presse et paraîtra à Pâques, de même que mon Ouvrage sur la Mécanique qui s'imprime à Rostock ([4]). J'ai achevé, il y a longtemps, mon Ouvrage *Sur le Calcul intégral,* mais il n'y a aucune apparence qu'il soit publié sitôt faute de libraires. L'Académie de Russie vient de publier le IXe Volume de ses *Nouveaux Commentaires.* J'avais aussi depuis longtemps achevé un *Traité sur la Dioptrique,* dont le résultat se trouve dans le XIIIe Volume de nos Mémoires ([5]); mais, comme on vient de découvrir de nouvelles espèces de verre, qui causent une beaucoup plus grande réfraction que le verre ordinaire, je suis actuellement occupé à refondre mon Ouvrage et à l'appliquer à toutes les diverses espèces de verre, puisque, par ce moyen, on peut procurer aux instruments dioptriques un beaucoup plus haut degré de perfection.

Je suis extrêmement ravi que le rétablissement de la paix me procure l'avantage de recommencer votre correspondance, qui m'a toujours fourni les plus importants éclaircissements, et je me flatte d'en retirer à l'avenir encore un plus grand profit.

J'ai l'honneur d'être avec la plus parfaite considération, monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

([1]) *Voir* t. XIII, p. 31.
([2]) Entre Newton et Leibnitz au sujet de la priorité de la découverte.
([3]) Voir *Institutiones Calculi differentialis,* 1755, in-4°. *Præfatio,* p. xv et suiv.
([4]) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.* Rostock, 1765, in-4°.
([5]) Ce treizième Volume (année 1757) contient les deux Mémoires suivants d'Euler : *Règles générales pour la construction des télescopes, de quelque nombre de verres qu'ils soient composés. — Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés.*